一般相対性理論 演習問題 第 10 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 7 月 12 日

I.

■Riemann テンソル　接続係数は演習問題第 4 回の問 III で求めた通りである。Riemann テンソルの独立成分で、Ricci テンソルの導出に必要なものは 18 成分である。それらを計算すると、非零成分は以下の通りである。

$$R^r{}_{trt} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R^\theta{}_{t\theta t} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R^\phi{}_{t\phi t} = -\frac{\ddot{a}}{a}$$
$$R^\theta{}_{r\theta r} = \frac{\dot{a}^2 + k}{1 - kr^2}, \qquad R^\phi{}_{r\phi r} = \frac{\dot{a}^2 + k}{1 - kr^2}, \qquad R^\phi{}_{\theta\phi\theta} = r^2\left(\dot{a}^2 + k\right)$$

計量 $g_{\mu\nu}$ が対角型であるから、各成分の添字の上げ下げは簡単である。計算の簡単のため、添字を上げる。

$$R^{rt}{}_{rt} = \frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R^{\theta t}{}_{\theta t} = \frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R^{\phi t}{}_{\phi t} = \frac{\ddot{a}}{a}$$
$$R^{\theta r}{}_{\theta r} = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}, \qquad R^{\phi r}{}_{\phi r} = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}, \qquad R^{\phi\theta}{}_{\phi\theta} = \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}$$

■Ricci テンソル　Ricci テンソル $R^\mu{}_\nu$ は以下で定義される。

$$R^\mu{}_\nu = R^{\alpha\mu}{}_{\alpha\nu}$$

非零成分は以下の通りである。

$$R^t{}_t = 3\frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R^r{}_r = R^\theta{}_\theta = R^\phi{}_\phi = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}$$

■Ricci スカラー　Ricci スカラー R は以下で定義される。

$$R = R^\mu{}_\mu$$

計算すると、

$$R = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 6\frac{k}{a^2}$$

■Einstein テンソル　Einstein テンソル $G^\mu{}_\nu$ は以下で定義される。

$$G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R$$

非零成分は以下の通りである。

$$G^t{}_t = -3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3\frac{k}{a^2}, \qquad G^r{}_r = G^\theta{}_\theta = G^\phi{}_\phi = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}$$

■Einstein 方程式　Einstein 方程式は以下で定義される。

$$G^\mu{}_\nu = 8\pi G T^\mu{}_\nu$$

独立な式は以下の通りである。

$$-3\frac{\dot{a}^2}{a^2} - 3\frac{k}{a^2} = -8\pi G\rho \tag{1.1}$$
$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = 8\pi G p \tag{1.2}$$

■解　以下、これを解く。式 (1.1) を t で微分して整理すると、

$$-3\left(2\frac{\ddot{a}}{a}-2\frac{\dot{a}^2}{a^2}-2\frac{k}{a^2}\right)\frac{\dot{a}}{a}=-8\pi G\dot{\rho}$$

一方、式 (1.1), (1.2) を片々引くと

$$2\frac{\ddot{a}}{a}-2\frac{\dot{a}^2}{a^2}-2\frac{k}{a^2}=-8\pi G(\rho+p)$$

これらを比較すると、

$$3(\rho+p)\frac{\dot{a}}{a}=-\dot{\rho} \tag{1.3}$$

を得る。

状態方程式 $p=-w\rho$ を代入すると、

$$\frac{\dot{a}}{a}=-\frac{1}{3(1+w)}\frac{\dot{\rho}}{\rho}$$

これを解くと

$$a=a_0\rho^{-\frac{1}{3(1+w)}}$$

を得る。

■参考　式 (1.3) は、

$$\nabla_\mu T^{\mu 0}=0$$

を表している。

II.

$k=0,\ p=-\rho$ を仮定する。

式 (1.3) より $\dot{\rho}=0$、すなわち ρ は時間依存しない。式 (1.1) より

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2}=\frac{8\pi G\rho}{3}$$

Hubble 定数 H

$$H\coloneqq\pm\sqrt{\frac{8}{3}\pi G\rho}$$

を導入すると、

$$a=a_0e^{Ht}$$

を得る。

計量に戻してやると

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=-\,\mathrm{d}t^2+\left(a_0e^{Ht}\right)^2\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right)\\&=\left(a_0e^{Ht}\right)^2\left(-\frac{1}{\left(a_0e^{Ht}\right)^2}\,\mathrm{d}t^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2\right)\end{aligned}$$

ここで、座標変換

$$\eta=\frac{1}{Ha_0e^{Ht}}$$

を行うと、

$$\mathrm{d}s^2=\frac{-\,\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}{H^2\eta^2}$$

を得る。

Hubble 定数 H は、宇宙の膨張速度を表している。