一般相対性理論 演習問題 第 1 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 7 月 4 日

I

重力ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{x})$ を

$$\phi_N(\boldsymbol{x}) = -\int \mathrm{d}^3x' \frac{G\rho(\boldsymbol{x'})}{|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{x}|}$$

と定める。恒等式

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right) = -4\pi\delta(\boldsymbol{x})$$

を用いると、

$$\begin{aligned}\nabla^2\phi_N(\boldsymbol{x}) &= -G\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x'})\nabla^2\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{x}|}\right) \\ &= 4\pi G\int \mathrm{d}^3x'\rho(\boldsymbol{x'})\delta(\boldsymbol{x'} - \boldsymbol{x}) \\ &= 4\pi G\rho(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

が成り立つ。

II

変位ベクトルについて

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}y &= \sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\phi \\
\mathrm{d}z &= \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\
&= (\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\phi)^2 \\
&\quad + (\sin\theta\sin\phi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\phi\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\phi\,\mathrm{d}\phi)^2 \\
&\quad + (\cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta)^2 \\
&= (\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}r^2 \\
&\quad + (r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos\theta^2\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta^2 \\
&\quad + (r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi)\,\mathrm{d}\phi^2 \\
&\quad + 2(r\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi - r\sin\theta\cos\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&\quad + 2(-r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi + r\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \\
&\quad + 2(-r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\cos\phi)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2
\end{aligned}
$$

■参考　展開する際、$\mathrm{d}r^2, \mathrm{d}\theta^2, \mathrm{d}\phi^2, \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi, \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ の項にはじめから分けると計算が楽である。

III

■固有時間　固有時間 τ について、

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \mathrm{d}t &= (1 + a\xi)\cosh a\eta \, \mathrm{d}\eta + \sinh a\eta \, \mathrm{d}\xi \\ \mathrm{d}x &= (1 + a\xi)\sinh a\eta \, \mathrm{d}\eta + \cosh a\eta \, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

であるから、

$$\mathrm{d}\tau^2 = (1 + a\xi)^2 \, \mathrm{d}\eta^2 - \mathrm{d}\xi^2 \tag{3.1}$$

と表せる。特に ξ 一定の場合は

$$\mathrm{d}\tau^2 = (1 + a\xi)^2 \, \mathrm{d}\eta^2$$

となる。ここで、固有時間の符号はどちらでも構わないので

$$\mathrm{d}\tau = (1 + a\xi) \, \mathrm{d}\eta \tag{3.2}$$

としておく。

■加速度　ξ 一定の粒子の加速度を求める。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial t}{\partial \eta} = \cosh a\eta \\ \frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} &= \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{a}{1 + a\xi}\sinh a\eta \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sinh a\eta \\ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} &= \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right) = \frac{a}{1 + a\xi}\cosh a\eta \end{aligned}$$

したがって、この粒子の加速度 α は

$$\alpha = \sqrt{-\left(\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^2} = \frac{a}{1 + a\xi}$$

である。

■計量　固有時間は式 (3.1) の通りであるから、計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -(1+a\xi)^2\,\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\xi^2$$

と表せる。

■Minkowski 時空　Minkowski 時空 (t,x) 上で、座標系 (η,ξ) がどうなるかを考える。与えられた変換則より

$$\left(x+a^{-1}\right)^2 - t^2 = \left(\xi+a^{-1}\right)^2$$

が成り立つ。これは双曲線（または点）である。中心は (t,x)、頂点は $(0,-2a^{-1}-\xi)$, $(0,\xi)$、漸近線は $x=-a^{-1}\pm t$ である。ただし、$\cosh>0$ だから頂点が $(0,\xi)$ の方のみである。あらゆる ξ に対してこの双曲線を描くと、Minkowski 時空上の座標系 (η,ξ) は図 1 のようになる。

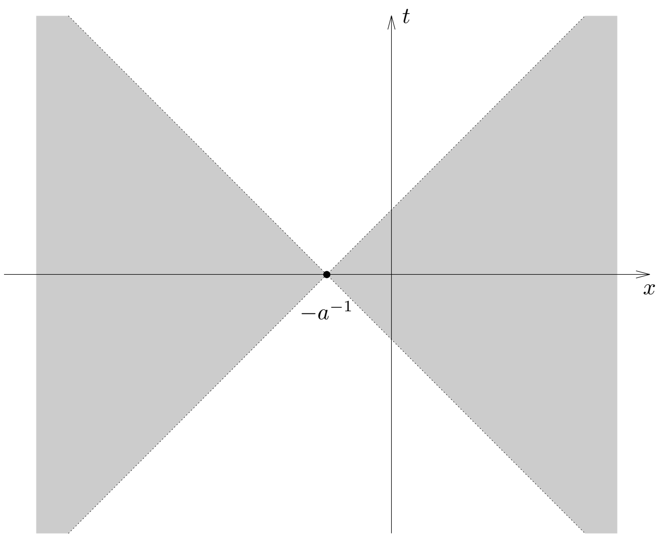

図1

実際、$a>0$ のときに ξ 一定の粒子の軌跡を描くと、図 2 のようになる。ただし、式 (3.2) で符号を逆にとった場合、軌跡も逆向きになる。

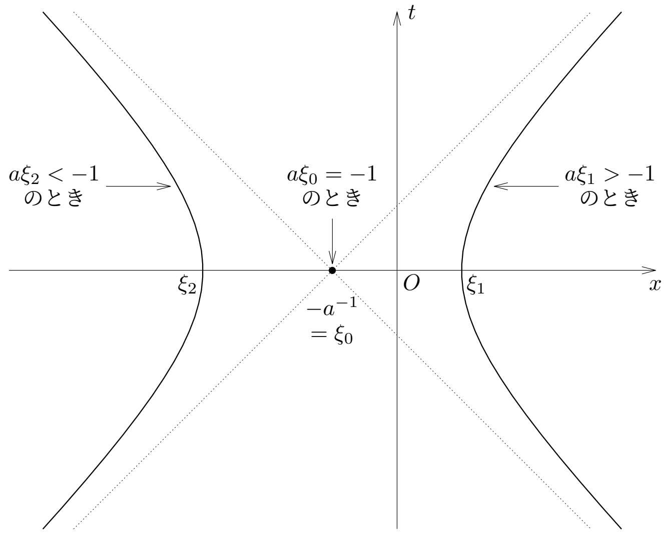

図2

IV

計量

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

について、変換則より

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \cos\Omega t\,\mathrm{d}\bar{x} - \sin\Omega t\,\mathrm{d}\bar{y} + \Omega(-\bar{x}\sin\Omega t - \bar{y}\cos\Omega t)\,\mathrm{d}t \\
\mathrm{d}y &= \sin\Omega t\,\mathrm{d}\bar{x} + \cos\Omega t\,\mathrm{d}\bar{y} + \Omega(+\bar{x}\cos\Omega t - \bar{y}\sin\Omega t)\,\mathrm{d}t \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}\bar{z}
\end{aligned}$$

だから

$$\mathrm{d}s^2 = -\,\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}\bar{x}^2 + \mathrm{d}\bar{y}^2 + \mathrm{d}\bar{z}^2 + \Omega^2\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right)\mathrm{d}t^2 - 2\Omega\bar{y}\,\mathrm{d}\bar{x}\,\mathrm{d}t + 2\Omega\bar{x}\,\mathrm{d}\bar{y}\,\mathrm{d}t$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= r\cos\theta & \mathrm{d}\bar{x} &= \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
\bar{y} &= r\sin\theta & \mathrm{d}\bar{y} &= \sin\theta\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

とおくと、

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \Omega^2 r^2\right)\mathrm{d}t^2 + 2\Omega r^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\bar{z}^2$$

平方完成すると

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \Omega^2 r^2\right)\left(\mathrm{d}t - \frac{\Omega r^2}{1 - \Omega^2 r^2}\,\mathrm{d}\theta\right)^2 + \frac{1}{1 - \Omega^2 r^2}\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}r^2 + \mathrm{d}\bar{z}^2$$

と表せる。