一般相対性理論 演習問題 第 2 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 7 月 18 日

I

スカラーは座標変換で不変であるから、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}\tilde{\phi} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}\phi \\
&= \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\phi \quad (\text{連鎖律})
\end{aligned}
$$

これは $\partial\phi/\partial x^\mu$ の変換則が一形式の変換則に一致することを表す。

II

■計量の変換則の図　図をぐっと睨むと、計量の変換則はたちどころに分かる。

$$
\begin{tikzcd}
A^\beta \arrow[r, "g_{\alpha\beta}"] \arrow[d, shift left, "\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}"] & A_\alpha \arrow[d, "\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}"] \\
\tilde{A}^\nu \arrow[u, dashed, shift left, "\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}"] \arrow[r, Rightarrow, "\tilde{g}_{\mu\nu}"] & \tilde{A}_\mu
\end{tikzcd}
$$

$$
\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta}
$$

■計量の変換則の解　丁寧に書くと、以下のようになる。

座標変換において、1 形式の変換は

$$
\tilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}A_\alpha \tag{2.1}
$$

で与えられる。一方、ベクトルの変換は

$$
\tilde{A}^\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}A^\beta
$$

であるから、逆変換は

$$
A^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}\tilde{A}^\nu \tag{2.2}
$$

で与えられる。

また、ベクトルと 1 形式との間の変換は、それぞれの座標系で

$$
A_\alpha = g_{\alpha\beta}A^\beta \tag{2.3}
$$

$$
\tilde{A}_\mu = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{A}^\nu \tag{2.4}
$$

と表される。

式 (2.1), (2.2), (2.3) より、

$$
\tilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta}\tilde{A}^\nu
$$

が成り立つ。当式と式 (2.4) をぐっと睨んで

$$
\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta}
$$

■世界間隔の普遍性　世界間隔は

$$g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$$

で定義される。計量テンソルの変換則を用いると、

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\tilde{x}^\mu\,\mathrm{d}\tilde{x}^\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta}\cdot\mathrm{d}\tilde{x}^\mu\,\mathrm{d}\tilde{x}^\nu && \text{(計量の変換則)}\\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta}\cdot\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\lambda}\,\mathrm{d}x^\lambda\cdot\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\rho}\,\mathrm{d}x^\rho && \text{(連鎖律)}\\
&= \delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_\rho g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\lambda\,\mathrm{d}x^\rho && \text{(連鎖律)}\\
&= g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta && (\delta\text{ の縮約}; \lambda=\alpha,\ \rho=\beta)
\end{aligned}$$

となる。したがって、世界間隔は座標変換で不変である。

■循環論法に気付けなかった愚か者の誤答　計量テンソルの定義

$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu\cdot\boldsymbol{e}_\nu \tag{2.5}$$

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \tilde{\boldsymbol{e}}_\mu\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_\nu \tag{2.6}$$

及び、内積が座標変換で不変であることを用いる。

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分表示

$$\boldsymbol{A} = A^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha = \tilde{A}^\mu\tilde{\boldsymbol{e}}_\mu \tag{2.7}$$

について、逆変換則

$$A^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\tilde{A}^\mu \tag{2.8}$$

が成り立つ。よって、内積 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} &= (A^\alpha\boldsymbol{e}_\alpha)\cdot\left(A^\beta\boldsymbol{e}_\beta\right) && \text{(成分表示 (2.7))}\\
&= \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\tilde{A}^\mu\boldsymbol{e}_\alpha\right)\cdot\left(\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}\tilde{A}^\nu\boldsymbol{e}_\beta\right) && \text{(変換則 (2.8))}\\
&= \tilde{A}^\mu\tilde{A}^\nu\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta} && \text{(計量の定義 (2.5))}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

となる。また、内積は座標変換で不変であるから

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} &= \left(\tilde{A}^\mu\tilde{\boldsymbol{e}}_\mu\right)\cdot\left(\tilde{A}^\nu\tilde{\boldsymbol{e}}_\nu\right) && \text{(成分表示 (2.7))}\\
&= \tilde{A}^\mu\tilde{A}^\nu\tilde{g}_{\mu\nu} && \text{(計量の定義 (2.6))}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。2 式 (2.9), (2.10) を比較すると、計量テンソルの変換則

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}g_{\alpha\beta}$$

が得られる。

III

座標変換を行うと

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu}\tilde{A}^\nu &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}A^\beta\right) && \text{(連鎖律)}\\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}A^\beta + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}A^\beta\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\beta}\right) && \text{(積の微分)}
\end{aligned}$$

となる。右辺の第 1 項はテンソルの変換則を満たしている。よって、第 2 項が 0 であれば $\partial A^\nu/\partial x_\mu$ はテンソルであるが、そうでなければ $\partial A^\nu/\partial x_\mu$ はテンソルではない。

IV

Euclid 空間における回転を考える。これは、ベクトルの長さや角度を保つ変換である。

ある回転によって、元の座標系の下付きの基底が $\boldsymbol{e}_i$ から回転座標系の下付きの基底 $\tilde{\boldsymbol{e}}_i$ に変換されるとする。このとき、もとの座標系の上付きの基底 $\boldsymbol{e}^i$ を同じ回転で変換したものを $\tilde{\boldsymbol{e}}^i$ すると、これは回転座標系の上付きの基底をなす。なぜならば、$\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta^i_j$ であり、これは回転変換で不変であるので $\tilde{\boldsymbol{e}}^i\cdot\tilde{\boldsymbol{e}}_j = \delta^i_j$ を満たすからである。よって、下付き、上付きの基底は同じ回転で変換されるので、上付き、下付き添字の区別はない。

V

$B_{\mu\nu} = A_{\nu\mu},\ \tilde{B}_{\mu\nu} = \tilde{A}_{\nu\mu}$ と定めて座標変換を行うと

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{\mu\nu} &= \tilde{A}_{\nu\mu} && (\tilde{B} \text{ の定義}) \\
&= \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu} A_{\beta\alpha} && (\text{テンソル } A \text{ の変換則}) \\
&= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} B_{\alpha\beta} && (B \text{ の定義})
\end{aligned}$$

となる。テンソルの満たすべき変換則を満たしているので、$B_{\mu\nu}$ はテンソルである。

■対称テンソル　テンソル $A_{\mu\nu}$ を対称テンソル、つまり $A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}$ とする。このとき $B_{\mu\nu}$ の定義より

$$A_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$$

となる。これを座標変換すると、$A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ がテンソルであることから、同じ座標変換則を満たすので

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{\mu\nu} &= \tilde{B}_{\mu\nu} \\
&= \tilde{A}_{\nu\mu} \quad (\tilde{B} \text{ の定義})
\end{aligned}$$

が成り立つ。これは、対称性が座標変換で保たれることを示している。

■反対称テンソル　テンソル $A_{\mu\nu}$ を反対称テンソル、つまり $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ とする。このとき $B_{\mu\nu}$ の定義より

$$A_{\mu\nu} = -B_{\mu\nu}$$

となる。これを座標変換すると、$A_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}$ がテンソルであることから、同じ座標変換則を満たすので

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{\mu\nu} &= -\tilde{B}_{\mu\nu} \\
&= -\tilde{A}_{\nu\mu} \quad (\tilde{B} \text{ の定義})
\end{aligned}$$

が成り立つ。これは、反対称性が座標変換で保たれることを示している。

VI

A の対称性および B の反対称性より

$$\begin{aligned}
A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} &= A^{\nu\mu} B_{\mu\nu} && (A \text{ の対称性}) \\
&= -A^{\nu\mu} B_{\nu\mu} && (B \text{ の反対称性}) \\
&= -A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} && (\text{添字の変更})
\end{aligned}$$

となる。したがって

$$A^{\mu\nu} B_{\mu\nu} = 0$$

が成り立つ。