一般相対性理論 演習問題 第 3 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 7 月 6 日

I.

スカラーの共変微分は偏微分に一致するので、

$$\begin{aligned}\nabla_\mu (A^\nu B_\nu) &= \partial_\mu (A^\nu B_\nu) \\ &= (\partial_\mu A^\nu) B_\nu + A^\nu (\partial_\mu B_\nu) \quad (\text{積の微分})\end{aligned} \tag{1.1}$$

となる。また、共変微分についても Leibniz 則（積の微分）が成り立つことを要請すると

$$\nabla_\mu (A^\nu B_\nu) = (\nabla_\mu A^\nu) B_\nu + A^\nu (\nabla_\mu B_\nu) \tag{1.2}$$

となる。式 (1.1), (1.2) を比較すると、

$$(\nabla_\mu A^\nu) B_\nu + A^\nu (\nabla_\mu B_\nu) = (\partial_\mu A^\nu) B_\nu + A^\nu (\partial_\mu B_\nu) \tag{1.3}$$

よって

$$\begin{aligned}A^\nu (\partial_\mu B_\nu - \nabla_\mu B_\nu) &= (\nabla_\mu A^\nu - \partial_\mu A^\nu) B_\nu \quad &(\text{式 (1.3) の両辺を移項}) \\ &= \Gamma^\nu_{\alpha\mu} A^\alpha B_\nu &(\text{ベクトルの共変微分}) \\ &= \Gamma^\alpha_{\nu\mu} A^\nu B_\alpha &(\text{添字の変更})\end{aligned}$$

A^ν は任意なので、

$$\partial_\mu B_\nu - \nabla_\mu B_\nu = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} B_\alpha$$

これを整理すると、

$$\nabla_\mu B_\nu = \partial_\mu B_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} B_\alpha$$

II.

(1)

行列 G を (μ,ν) 成分が $g_{\mu\nu}$ の行列と定める。このとき、G^{-1} の (μ,ν) 成分は $g^{\mu\nu}$ である。

$$G=\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix}, \quad G^{-1}=\begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} & \cdots & g^{1n} \\ g^{21} & g^{22} & \cdots & g^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{n1} & g^{n2} & \cdots & g^{nn} \end{bmatrix}$$

また、行列 δG を (μ,ν) 成分が $\delta g_{\mu\nu}$ の行列と定める。

$$\delta G=\begin{bmatrix} \delta g_{11} & \delta g_{12} & \cdots & \delta g_{1n} \\ \delta g_{21} & \delta g_{22} & \cdots & \delta g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta g_{n1} & \delta g_{n2} & \cdots & \delta g_{nn} \end{bmatrix}$$

δg は

$$\delta g = \det(G+\delta G) - \det(G) \tag{2.1}$$

である。$G+\delta G = G(E+G^{-1}\,\delta G)$ であるから、

$$\begin{aligned} \det(G+\delta G) &= \det(G(E+G^{-1}\,\delta G)) \\ &= \det(G)\det(E+\underbrace{G^{-1}\,\delta G}_{\delta H}) \quad (\text{積の行列式}) \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで、行列 δH を $\delta H = G^{-1}\,\delta G$ と定める。δH の (μ,ν) 成分を $\delta h^{\mu}{}_{\nu}$ とすると、

$$\delta h^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\lambda}\,\delta g_{\lambda\nu} \quad (\text{行列積の定義}) \tag{2.3}$$

となる。$\det(E+\delta H)$ について、

$$E+\delta H=\begin{bmatrix} 1+\delta h^{1}{}_{1} & \delta h^{1}{}_{2} & \cdots & \delta h^{1}{}_{n} \\ \delta h^{2}{}_{1} & 1+\delta h^{2}{}_{2} & \cdots & \delta h^{2}{}_{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta h^{n}{}_{1} & \delta h^{n}{}_{2} & \cdots & 1+\delta h^{n}{}_{n} \end{bmatrix}$$

であり、$\delta h^{\mu}{}_{\nu}$ の 2 次以上の項は無視すると、対角成分のみが残る。よって、

$$\begin{aligned} \det(E+\delta H) &= (1+\delta h^{1}{}_{1})(1+\delta h^{2}{}_{2})\cdots(1+\delta h^{n}{}_{n}) \\ &= 1+\delta h^{1}{}_{1}+\delta h^{2}{}_{2}+\cdots+\delta h^{n}{}_{n} && (\delta h \text{ の 2 次以上の項を無視}) \\ &= 1+\delta h^{\mu}{}_{\mu} && (\text{Einstein の縮約記法}) \end{aligned}$$

となる。$g=\det(G)$ とおき、式 (2.1), (2.2) に戻してやると、

$$\begin{aligned} \det g &= \det(G+\delta G) - \det(G) \\ &= g\,\delta h^{\mu}{}_{\mu} \\ &= g g^{\mu\lambda}\,\delta g_{\lambda\mu} && (h^{\mu}{}_{\nu} \text{ の定義 (2.3)}) \\ &= g g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} && (g^{\mu\nu} \text{ は対称}) \end{aligned}$$

■

(2)

(1) の結果を用いると、

$$\begin{aligned}
\delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\,\delta g \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} g g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} \quad ((1)\text{ の結果}) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ここで、$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (G^{-1}G = E)$ で不変であるから、

$$\begin{aligned}
&0 = \delta g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda}\,\delta g_{\lambda\nu} \\
&\therefore g^{\mu\lambda}\,\delta g_{\lambda\nu} = -\,\delta g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu}
\end{aligned}$$

和をとり、$g^{\mu\nu}$ が対称であることを用いると

$$g^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu} = -\,\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$$

となる。

式 (2.4) に代入すると、

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}\,\delta g^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$$

■

(3)

左辺について、

$$\begin{aligned}\nabla_\mu A^\mu &= \partial_\mu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} A^\lambda \\ &= \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\lambda\mu,\nu}) A^\lambda \quad \text{(接続係数の定義)}\end{aligned}$$

ここで、$g^{\mu\nu}$ が対称であることを用いると、

$$g^{\mu\nu} g_{\lambda\nu,\mu} A^\lambda = g^{\mu\nu} g_{\lambda\mu,\nu} A^\lambda$$

であるから、

$$\nabla_\mu A^\mu = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\lambda} A^\lambda \tag{2.5}$$

右辺について、式 (2.4) より

$$\partial_\lambda \sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \partial_\lambda g_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

であることを用いると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\lambda(\sqrt{-g}A^\lambda) &= \partial_\lambda A^\lambda + \frac{1}{\sqrt{-g}} A^\lambda\, \partial_\lambda \sqrt{-g} \quad \text{(積の微分)} \\ &= \partial_\lambda A^\lambda + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} A^\lambda g_{\mu\nu,\lambda} \qquad \text{(式 (2.6))}\end{aligned} \tag{2.7}$$

式 (2.5), (2.7) を比較すると、

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\lambda(\sqrt{-g}A^\lambda)$$

■

III.

計量の非零成分は

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2$$

であり、計量の逆行列の非零成分は

$$g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = r^{-2}$$

である。よって、$g_{\mu\nu,\lambda}$ の非零成分は

$$g_{\theta\theta,r} = 2r$$

である。

以上を用いると、非零成分は $\Gamma^r_{\theta\theta}, \Gamma^\theta_{\theta r}, \Gamma^\theta_{r\theta}$ の 3 つである。

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{\theta\theta} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(g_{r\theta,\theta} + g_{r\theta,\theta} - g_{\theta\theta,r} \right) \\
&= -r \\
\Gamma^\theta_{\theta r} &= \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(g_{\theta\theta,r} + g_{\theta r,\theta} - g_{\theta r,\theta} \right) \\
&= r^{-1}
\end{aligned}$$

対称性より

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = r^{-1}$$

IV.

■解法1

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta,\mu} - \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}g_{\beta\nu}\left(g_{\lambda\alpha,\mu} + g_{\lambda\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\lambda}\right) - \frac{1}{2}g^{\nu\lambda}g_{\alpha\nu}\left(g_{\lambda\beta,\mu} + g_{\lambda\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\lambda}\right)$$

ここで、

$$g^{\nu\lambda}g_{\beta\nu} = \delta^\lambda_\beta, \quad g^{\nu\lambda}g_{\alpha\nu} = \delta^\lambda_\alpha$$

であるから、

$$\begin{aligned}\nabla_\mu g_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\beta,\mu} - \frac{1}{2}\left(g_{\beta\alpha,\mu} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\beta}\right) - \frac{1}{2}\left(g_{\alpha\beta,\mu} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\beta\mu,\alpha}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

■

■解法2　計量の定義 $g_{\alpha\beta} = \boldsymbol{e}_\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta$ より

$$\begin{aligned}\partial_\mu g_{\alpha\beta} &= (\partial_\mu \boldsymbol{e}_\alpha)\cdot\boldsymbol{e}_\beta + \boldsymbol{e}_\alpha\cdot(\partial_\mu\boldsymbol{e}_\beta) && \text{(積の微分)} \\ &= \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{e}_\beta + \boldsymbol{e}_\alpha\cdot\Gamma^\lambda_{\beta\mu}\boldsymbol{e}_\lambda && \text{(接続係数の定義)} \\ &= \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta} + \Gamma^\lambda_{\beta\mu}g_{\alpha\lambda} && \text{(計量の定義)}\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}g_{\lambda\beta} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu}g_{\alpha\lambda} = 0$$

■

V.

■共変微分　計量、計量の逆行列および接続係数の非零成分は

$$
\begin{aligned}
&g_{rr}=1,\quad g_{\theta\theta}=r^2,\quad g_{zz}=1\\
&g^{rr}=1,\quad g^{\theta\theta}=r^{-2},\quad g^{zz}=1\\
&\Gamma^r{}_{\theta\theta}=-r,\quad \Gamma^\theta_{\theta r}=\Gamma^\theta_{r\theta}=r^{-1}
\end{aligned}
$$

である。

以上から、共変微分を計算すると

$$
\begin{aligned}
&\nabla_r A^r=\partial_r A^r\\
&\nabla_\theta A^\theta=\partial_\theta A^\theta+\Gamma^\theta_{r\theta}A^r=\partial_\theta A^\theta+r^{-1}A^r\\
&\nabla_z A^z=\partial_z A^z
\end{aligned}
$$

より、

$$\nabla_\mu A^\mu=\partial_r A^r+r^{-1}A^r+\partial_\theta A^\theta+\partial_z A^z$$

である。

■通常のベクトル解析との比較　通常のベクトル解析において、ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ の発散は

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\partial_r F_r+r^{-1}F_r+\underline{r^{-1}\,\partial_\theta F_\theta}+\partial_z F_z$$

が成り立つ。ここで、下線部が一般のテンソル解析の発散と異なることがわかる。これは、基底の取り方が異なるためである。

通常のベクトル解析では、Euclid 計量を入れるため、各点における基底ベクトルを元の Euclid 空間において長さが 1 であるようにとる。点 p におけるベクトル $\boldsymbol{F}$ を

$$\boldsymbol{F}=F_r\boldsymbol{e}_r+F_\theta\boldsymbol{e}_\theta+F_z\boldsymbol{e}_z$$

と成分分解したとき、そのノルムは

$$\|\boldsymbol{F}\|^2=F_r^2+F_\theta^2+F_z^2$$

で与えられる。一方、一般のテンソル解析では、各点における基底ベクトルは、その点における計量によって定まる。したがって、点 p におけるベクトル $\boldsymbol{A}$ を

$$\boldsymbol{A}=A^r\frac{\partial}{\partial r}+A^\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+A^z\frac{\partial}{\partial z}$$

と成分分解したとき、そのノルムは

$$g(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A})=(A^r)^2+r^2\big(A^\theta\big)^2+(A^z)^2$$

で与えられる。このように、基底ベクトルの取り方が異なるため成分も異なり、$\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ と $\nabla_\mu A^\mu$ の表現の違いに現れる。ここでは、$F_rA^r,\ F_\theta=rA^\theta,\ F_z=A^z$ とすれば、辻褄が合うことがわかる。

VI.

■結果

$$\mathcal{L}_\xi A_\nu = \xi^\lambda A_{\nu,\lambda} + \xi^\lambda{}_{,\nu} A_\lambda$$

■導出　点 p における Lie 微分を考える。任意の $\varepsilon \neq 0$ を与える。座標系 x^μ に対し、新しい座標系 $\bar{x}^\mu$ を次のように定める。点 q の新しい座標値 $\bar{x}^\mu_q$ を、ξ^μ が接ベクトルとなっている曲線上を q から ε だけ戻った点 p の古い座標値 x^μ_p とする。このとき、$\varepsilon \to 0$ のときに ε の 1 次に満たない項を無視すると、

$$\bar{x}^\mu_q := x^\mu_p = x^\mu_q - \varepsilon\xi^\mu(x_p) \tag{6.1}$$

が成り立つ。ただし、Taylor 展開より $\varepsilon\xi^\mu(x_p) = \varepsilon\xi^\mu(x_q)$ とできる。
　1 形式 A_ν に対し、新しい 1 形式 $\tilde{A}_\nu$ を次のように定める。

$$\tilde{A}_\nu(x_p) := \bar{A}_\nu(\bar{x}_q)$$

座標変換を行って

$$\tilde{A}_\nu(x_p) = \frac{\partial x^\mu_q}{\partial \bar{x}^\nu_q} A_\mu(x_q)$$

座標の定義 (6.1) より

$$\tilde{A}_\nu(x_p) = \frac{\partial(x^\mu_p + \varepsilon\xi^\mu(x_p))}{\partial x^\nu_p} A_\mu(x_p + \varepsilon\xi(x_p))$$

$\tilde{A}_\mu$ は座標の関数、つまり n 次元のとき n 変数関数だから、Taylor 展開すると

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\nu(x_p) &= \left(\delta^\mu_\nu + \varepsilon\xi^\mu{}_{,\nu}(x_p)\right)\left(A_\mu(x_p) + \varepsilon\xi^\lambda(x_p)A_{\mu,\lambda}(x_p)\right)\\ &= A_\nu(x_p) + \varepsilon\xi^\lambda(x_p)A_{\nu,\lambda}(x_p) + \varepsilon\xi^\mu{}_{,\nu}(x_p)A_\mu(x_p)\end{aligned}$$

点 p は任意であるから

$$\tilde{A}_\nu = A_\nu + \varepsilon\xi^\lambda A_{\nu,\lambda} + \varepsilon\xi^\lambda{}_{,\nu} A_\mu$$

　よって、Lie 微分は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\xi A_\nu &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\tilde{A}_\nu - A_\nu}{\varepsilon}\\ &= \xi^\lambda A_{\nu,\lambda} + \xi^\lambda{}_{,\nu} A_\lambda\end{aligned}$$

VII.

全問と同様に、

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} &= \xi^\lambda g_{\mu\nu,\lambda} + \xi^\lambda{}_{,\mu} g_{\lambda\nu} + \xi^\lambda{}_{,\nu} g_{\mu\lambda} \\
&= \xi^\lambda g_{\mu\nu,\lambda} + \left(\nabla_\mu \xi^\lambda - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}\xi^\alpha\right) g_{\lambda\nu} + \left(\nabla_\nu \xi^\lambda - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu}\xi^\alpha\right) g_{\mu\lambda} \\
&= g_{\lambda\nu}\nabla_\mu \xi^\lambda + g_{\mu\lambda}\nabla_\nu \xi^\lambda + \xi^\alpha\left(g_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu} g_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} g_{\mu\lambda}\right) \\
&= \nabla_\mu (g_{\lambda\nu}\xi^\lambda) + \nabla_\nu (g_{\mu\lambda}\xi^\lambda) + \xi^\alpha \nabla_\alpha g_{\mu\nu} \\
&= \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu
\end{aligned}
$$