一般相対性理論 演習問題 第 5 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 6 月 28 日

I.

Riemann テンソル $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ について以下の対称性が成り立つ。

1. $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}$
2. $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\nu\mu}$
3. $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$
4. $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$

対称性 1 より、添字 α, β を固定したとき、添字 μ, ν について反対称だから、独立な成分の組の代表として (μ, ν) $(\mu < \nu)$ を選べる。添字 μ, ν の選び方は共に n 通りだから、この選び方は

$$m \coloneqq {}_nC_2 = \frac{1}{2}n(n-1)$$

通りである。

対称性 2 より、添字 μ, ν を固定したとき、添字 α, β について反対称だから、独立な成分の組の代表として (α, β) $(\alpha < \beta)$ を選べる。添字 α, β の選び方は共に n 通りだから、この選び方は上と同じく m 通りである。

対称性 3 より、添字の組 $(\alpha, \beta), (\mu, \nu)$ について対称だから、独立な成分の組の組の代表として $((\alpha, \beta), (\mu, \nu))$ $((\alpha, \beta) \leq (\mu, \nu))$ を選べる。添字の組 $(\alpha, \beta), (\mu, \nu)$ の選び方は共に m 通りだから、この選び方は

$${}_{m+1}C_2 = \frac{1}{2}m(m+1) = \frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2)$$

通りである。

対称性 4 により与えられる従属関係を考える。添字 α, β, μ, ν の中に同じものがある場合、対称性 $1, 2, 3$ より

- α と α 以外の添字に同じものがある場合、

$$R_{\alpha\alpha\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\alpha} + R_{\alpha\nu\alpha\mu} = 0 - R_{\alpha\mu\alpha\nu} + R_{\alpha\mu\alpha\nu} = 0$$

- α 以外の添字に同じものがある場合、

$$R_{\alpha\mu\mu\nu} + R_{\alpha\nu\mu\mu} + R_{\alpha\mu\nu\mu} = R_{\alpha\mu\mu\nu} + 0 - R_{\alpha\mu\mu\nu} = 0$$

が成り立つので、対称性 4 により新たな従属関係は与えられない。添字 α, β, μ, ν の中に同じものがない場合、$\alpha < \beta < \mu < \nu$ としてこの並び替えに対して対称性 4 を考える。これは $4! = 24$ 通り与えられるが、対称性 $1, 2, 3$ を用いると全て同値であり、代表として

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} + R_{\alpha\nu\beta\mu} = 0$$

がとれる。添字 α, β, μ, ν $(\alpha < \beta < \mu < \nu)$ の選び方は

$${}_nC_4 = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

通り（$n < 4$ のときは 0 通りで合致している）だから、新たな従属関係も $\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)$ 通りである。

以上より、自由度は

$$\frac{1}{8}n(n-1)(n^2-n+2) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) = \boldsymbol{\frac{1}{12}n^2(n-1)(n+1)}$$

である。

II.

与えられた球面の半径を小文字の r で表すこととする。(曲率の R と紛らわしいため)
接続係数を計算すると、非零成分は

$$\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^{\phi}_{\theta\phi} = \Gamma^{\phi}_{\phi\theta} = \cot\theta$$

である。

Riemann テンソルの自由度は 1 である。定義より

$$R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} = \Gamma^{\theta}_{\phi\phi,\theta} - \Gamma^{\theta}_{\phi\theta,\phi} + \Gamma^{\theta}_{\lambda\theta}\Gamma^{\lambda}_{\phi\phi} - \Gamma^{\theta}_{\lambda\phi}\Gamma^{\lambda}_{\theta\phi} = \sin^2\theta$$

を得る。添字を下げると

$$R_{\theta\phi\theta\phi} = g_{\theta\lambda}R^{\lambda}{}_{\phi\theta\phi} = r^2\sin^2\theta$$

である。対称性を用いて添字を上げると

$$R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = g^{\phi\lambda}R_{\lambda\theta\phi\theta} = 1$$

を得る。まとめると、Riemann テンソルの非零成分は

$$\begin{aligned} R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} &= -R^{\theta}{}_{\phi\phi\theta} = \sin^2\theta \\ R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} &= -R^{\phi}{}_{\theta\theta\phi} = 1 \end{aligned}$$

Ricci 曲率テンソル $R_{\mu\nu}$ は

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= R^{\lambda}{}_{\theta\lambda\theta} = 1 \\ R_{\theta\phi} &= R^{\lambda}{}_{\theta\lambda\phi} = 0 \\ R_{\phi\theta} &= -R_{\theta\phi} = 0 \\ R_{\phi\phi} &= R^{\lambda}{}_{\phi\lambda\phi} = \sin^2\theta \end{aligned}$$

である。

Ricci スカラー曲率 R は

$$R = g^{\lambda\mu}R_{\lambda\mu} = \boldsymbol{\frac{2}{r^2}}$$

である。

■確認　半径 r が大きくなるほど曲率 R は小さくなり、$r \to \infty$ で $R \to 0$ であることが確認できる。また、球面の曲率 R は一定である (θ, ϕ に依らない) ことも確認できる。

III.

■Jacobi 恒等式　Jacobi 恒等式

$$\bigl[[\nabla_\nu,\nabla_\lambda],\nabla_\mu\bigr]+\bigl[[\nabla_\lambda,\nabla_\mu],\nabla_\nu\bigr]+\bigl[[\nabla_\mu,\nabla_\nu],\nabla_\lambda\bigr]=0$$

は次のように示される。

$\nabla_\mu\nabla_\nu\nabla_\lambda$ の係数は、第 $1,2,3$ 項からそれぞれ $-1,0,1$ が生じるから合計 0 である。$\nabla_\mu\nabla_\lambda\nabla_\nu$ の係数も同様に 0 である。μ,ν,λ の巡回置換について対称であるから、全ての項の係数は 0 である。

■前半　Jacobi 恒等式の第 1 項は

$$\bigl[[\nabla_\nu,\nabla_\lambda],\nabla_\mu\bigr]=[\nabla_\nu,\nabla_\lambda]\nabla_\mu-\nabla_\mu[\nabla_\nu,\nabla_\lambda] \tag{3.1}$$

である。ここで

$$[\nabla_\nu,\nabla_\lambda]\nabla_\mu A_\beta=-R^\alpha{}_{\mu\nu\lambda}\nabla_\alpha A_\beta-\underline{R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}\nabla_\mu A_\alpha}\quad(\text{問 IV})$$

また

$$\begin{aligned}\nabla_\mu[\nabla_\nu,\nabla_\lambda]A_\beta&=\nabla_\mu\bigl(-R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}A_\alpha\bigr) && (\text{問題文})\\&=-\bigl(\nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}\bigr)A_\alpha-\underline{R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}\nabla_\mu A_\alpha} && (\text{Leibniz 則})\end{aligned}$$

を式 (3.1) に戻してやると、下線部の項が打ち消し合って

$$\bigl[[\nabla_\nu,\nabla_\lambda],\nabla_\mu\bigr]=-R^\alpha{}_{\mu\nu\lambda}\nabla_\alpha A_\beta-\bigl(\nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}\bigr)A_\alpha$$

を得る。第 2 項、第 3 項も同様である。

Jacobi 恒等式より

$$-(\underline{R^\alpha{}_{\mu\nu\lambda}+R^\alpha{}_{\nu\lambda\mu}+R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu}})\nabla_\alpha A_\beta-\bigl(\nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}+\nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}+\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\bigr)A_\alpha=0$$

が成り立つ。下線部は Riemann テンソルの恒等式より 0 だから

$$\bigl(\nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}+\nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}+\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\bigr)A_\alpha=0$$

が成り立つ。A_α は任意であるから

$$\nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda}+\nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu}+\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}=0$$

■

■後半　テンソルの添字 β を上げて

$$\nabla_\mu R^{\alpha\beta}{}_{\nu\lambda}+\nabla_\nu R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\mu}+\nabla_\lambda R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu}=0$$

$\mu=\alpha,\nu=\beta$ で縮約すると

$$\nabla_\alpha R^{\alpha\beta}{}_{\beta\lambda}+\nabla_\beta R^{\alpha\beta}{}_{\lambda\alpha}+\nabla_\lambda R^{\alpha\beta}{}_{\alpha\beta}=0$$

Ricci テンソルとスカラーを用いると

$$-\nabla_\alpha R^\alpha{}_\lambda-\nabla_\beta R^\beta{}_\lambda+\nabla_\lambda R=0$$

添字を変えて

$$-\nabla_\mu R^\mu{}_\lambda-\nabla_\mu R^\mu{}_\lambda+\nabla_\mu\delta^\mu_\lambda R=0$$

よって

$$\nabla_\mu\left(R^\mu{}_\lambda-\frac{1}{2}\delta^\mu_\lambda R\right)=0$$

■

IV.

■**解 1**　Riemann テンソルの性質（定義）

$$\begin{aligned} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} \\ &= \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu,\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\beta\mu} - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

を用いる。

$$\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big] B_{\lambda\rho} = \nabla_\mu \nabla_\nu B_{\lambda\rho} - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

$(0,3)$ 型テンソル $\nabla_\nu B_{\lambda\rho}$ に共変微分 ∇_μ を施して

$$\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big] B_{\lambda\rho} = \partial_\mu \nabla_\nu B_{\lambda\rho} - \underline{\Gamma^{\beta}_{\nu\mu}\nabla_\beta B_{\lambda\rho}} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\nabla_\nu B_{\beta\rho} - \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\nabla_\nu B_{\lambda\beta} - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

下線部の項は μ, ν について対称であるから打ち消し合う。共変微分を施して

$$\begin{aligned} \big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big] B_{\lambda\rho} &= \partial_\mu\big(\partial_\nu B_{\lambda\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} B_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} B_{\lambda\alpha}\big) \\ &\qquad - \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\big(\partial_\nu B_{\beta\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} B_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} B_{\beta\alpha}\big) - \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\big(\partial_\nu B_{\lambda\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} B_{\alpha\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} B_{\lambda\alpha}\big) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ &= \underline{\partial_\mu\,\partial_\nu B_{\lambda\rho}} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu,\mu} B_{\alpha\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\rho\nu,\mu} B_{\lambda\alpha} - \overbrace{\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu}\,\partial_\mu B_{\alpha\rho}}^{1} - \overbrace{\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu}\,\partial_\mu B_{\lambda\alpha}}^{2} \\ &\qquad - \underbrace{\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\,\partial_\nu B_{\beta\rho}}_{1} + \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} B_{\alpha\rho} + \underbrace{\Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu} B_{\beta\alpha}}_{1,2} - \underbrace{\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\,\partial_\nu B_{\lambda\beta}}_{2} + \underbrace{\Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu} B_{\alpha\beta}}_{1,2} + \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu} B_{\lambda\alpha} - (\mu \leftrightarrow \nu) \end{aligned}$$

下線部および番号を付けた部分それぞれの和は μ, ν について対称で、打ち消し合うので

$$\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big] B_{\lambda\rho} = -\Big(\Gamma^{\alpha}_{\lambda\nu,\mu} - \Gamma^{\beta}_{\lambda\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\Big) B_{\alpha\rho} - \big(\Gamma^{\alpha}_{\rho\nu,\mu} - \Gamma^{\beta}_{\rho\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}\big) B_{\lambda\alpha} - (\mu \leftrightarrow \nu)$$

Riemann テンソルの性質を用いて

$$\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big] B_{\lambda\rho} = -R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu} B_{\alpha\rho} - R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu} B_{\lambda\alpha}$$

■

■**解 2**　$(0,2)$ 型テンソル $\boldsymbol{B}$ を基底を用いて

$$\boldsymbol{B} = B_{\lambda\rho}\,\mathrm{d}x^\lambda \otimes \mathrm{d}x^\rho$$

と表す。このとき

$$\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big]\boldsymbol{B} = \big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big]\big(B_{\lambda\rho}\,\mathrm{d}x^\lambda \otimes \mathrm{d}x^\rho\big)$$

Leibniz 則を用いて微分を展開する。$(\nabla_\mu a)(\nabla_\nu b) + (\nabla_\nu a)(\nabla_\mu b)$ の形の項は μ, ν について対称であるから打ち消し合うので、2 階微分の項のみが残り

$$\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big]\boldsymbol{B} = \Big(\underline{\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big] B_{\lambda\rho}}\Big)\,\mathrm{d}x^\lambda \otimes \mathrm{d}x^\rho + B_{\lambda\rho}\big(\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big]\,\mathrm{d}x^\lambda\big) \otimes \mathrm{d}x^\rho + B_{\lambda\rho}\,\mathrm{d}x^\lambda \otimes \big(\big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big]\,\mathrm{d}x^\rho\big)$$

となる。下線部について、各添字 (λ, ρ) に対して $B_{\lambda\rho}$ はスカラー場であるから、0 になる。第 $2, 3$ 項について、Riemann テンソルの性質を用いると

$$\begin{aligned} \big[\nabla_\mu, \nabla_\nu\big]\boldsymbol{B} &= B_{\lambda\rho}\big(-R^{\lambda}{}_{\alpha\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\alpha\big) \otimes \mathrm{d}x^\rho + B_{\lambda\rho}\,\mathrm{d}x^\lambda \otimes \big(-R^{\rho}{}_{\alpha\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\alpha\big) \\ &= \big(-R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu} B_{\alpha\rho} - R^{\alpha}{}_{\rho\mu\nu} B_{\lambda\alpha}\big)\,\mathrm{d}x^\lambda \otimes \mathrm{d}x^\rho \end{aligned}$$

■