一般相対性理論 演習問題 第 6 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 7 月 13 日

I.

まだ

II.

■Riemann テンソル　接続係数は演習問題第 4 回の問 III で求めた通りである。Riemann テンソルの独立成分で、Ricci テンソルの導出に必要なものは 18 成分である。それらを計算すると、非零成分は以下の通りである。

$$R^{x}{}_{txt} = -\frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R^{y}{}_{tyt} = -\frac{\ddot{b}}{b}, \qquad R^{z}{}_{tzt} = -\frac{\ddot{c}}{c}$$

$$R^{y}{}_{xyx} = \frac{a\dot{a}\dot{b}}{b}, \qquad R^{z}{}_{yzy} = \frac{b\dot{b}\dot{c}}{c}, \qquad R^{x}{}_{zxz} = \frac{c\dot{c}\dot{a}}{a}$$

計量 $g_{\mu\nu}$ が対角型であるから、各成分の添字の上げ下げは簡単である。計算の簡単のため、添字を上げる。

$$R^{xt}{}_{xt} = \frac{\ddot{a}}{a}, \qquad R^{yt}{}_{yt} = \frac{\ddot{b}}{b}, \qquad R^{zt}{}_{zt} = \frac{\ddot{c}}{c}$$

$$R^{yx}{}_{yx} = \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}, \qquad R^{zy}{}_{zy} = \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}, \qquad R^{xz}{}_{xz} = \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca}$$

■Ricci テンソル　Ricci テンソル $R^{\mu}{}_{\nu}$ は以下で定義される。

$$R^{\mu}{}_{\nu} = R^{\alpha\mu}{}_{\alpha\nu}$$

非零成分は以下の通りである。

$$R^{t}{}_{t} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c}, \qquad R^{x}{}_{x} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca}, \qquad R^{y}{}_{y} = \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}, \qquad R^{z}{}_{z} = \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}$$

■Ricci スカラー　Ricci スカラー R は以下で定義される。

$$R = R^{\mu}{}_{\mu}$$

計算すると、

$$R = 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca}\right)$$

■Einstein テンソル　Einstein テンソル $G^{\mu}{}_{\nu}$ は以下で定義される。

$$G^{\mu}{}_{\nu} = R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}R$$

非零成分は以下の通りである。

$$G^{t}{}_{t} = -\left(\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca}\right), \qquad G^{x}{}_{x} = -\left(\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc}\right), \qquad G^{y}{}_{y} = -\left(\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca}\right), \qquad G^{z}{}_{z} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab}\right)$$

■Einstein 方程式　真空の Einstein 方程式は以下で与えられる。

$$G^{\mu}{}_{\nu} = 0$$

非零の式は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
&\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = 0 \\
&\frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\dot{b}\dot{c}}{bc} = 0 \\
&\frac{\ddot{c}}{c} + \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{c}\dot{a}}{ca} = 0 \\
&\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} = 0
\end{aligned}$$

■解　$a(t) = t^{p_1},\ b(t) = t^{p_2},\ c(t) = t^{p_3}$ が与えられたとすると、Einstein 方程式は以下の式に書き換えられる。

$$p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 = 0 \tag{2.1}$$
$$p_2(p_2 - 1) + p_3(p_3 - 1) + p_2p_3 = 0 \tag{2.2}$$
$$p_3(p_3 - 1) + p_1(p_1 - 1) + p_3p_1 = 0 \tag{2.3}$$
$$p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + p_1p_2 = 0 \tag{2.4}$$

式 (2.2) より

$$(p_2 + p_3)^2 - p_2p_3 - (p_2 + p_3) = 0$$

が成り立つ。ここで、式 (2.1) より

$$p_2p_3 = -p_1(p_2 + p_3)$$

を代入して

$$(p_2 + p_3)^2 + p_1(p_2 + p_3) - (p_2 + p_3) = 0$$

よって

$$(p_2 + p_3)(p_1 + p_2 + p_3 - 1) = 0$$

が成り立つ。式 (2.3), (2.4) についても同様であるから、Einstein 方程式は次式で言い換えられる。

$$\begin{aligned}
&p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1 = 0 \\
&(p_2 + p_3)(p_1 + p_2 + p_3 - 1) = 0 \\
&(p_3 + p_1)(p_1 + p_2 + p_3 - 1) = 0 \\
&(p_1 + p_2)(p_1 + p_2 + p_3 - 1) = 0
\end{aligned}$$

ここで、場合分けを行う。

- $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ のとき

  $$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = (p_1 + p_2 + p_3)^2 - 2(p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1) = 1$$

- $p_1 + p_2 + p_3 \neq 1$ のとき

  $$\begin{aligned}
  &p_2 + p_3 = 0,\ p_3 + p_1 = 0,\ p_1 + p_2 = 0 \\
  &\therefore p_1 = p_2 = p_3 = 0
  \end{aligned}$$

以上より、解は点

$$p_1 = p_2 = p_3 = 0$$

あるいは平面と球面の交わり

$$\begin{aligned}
&p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\
&p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1
\end{aligned}$$

である。

■分かること　対称性などから計量の形がわかれば、Einstein 方程式から計量を具体的に導くことができる。