一般相対性理論 演習問題 第 7 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 7 月 6 日

I.

■運動方程式

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{EH}} &= \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} R = \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\
S_{\mathrm{m}} &= -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi
\end{aligned}
$$

とおく。

S_{EH} の変分は

$$
\delta S_{\mathrm{EH}} = \int \mathrm{d}x^4 \left[\delta \sqrt{-g} R + \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu}\right]
$$

ここで、δS_{EH} の第 3 項について、表面項を 0 として

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \delta R_{\mu\nu} &= \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \left(\nabla_\lambda\, \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\nu\, \delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}\right) \\
&= \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} \nabla_\lambda \left(g^{\mu\nu}\, \delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\, \delta\Gamma^\nu_{\mu\nu}\right) = 0
\end{aligned}
$$

であるから、Einstein テンソル $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ を用いると

$$
\delta S_{\mathrm{EH}} = \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R\right] = \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} G_{\mu\nu} \tag{1.1}
$$

S_{m} の変分は

$$
\delta S_{\mathrm{m}} = -\frac{1}{2} \int \mathrm{d}x^4 \left[\delta \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi + \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \delta\phi\, \partial_\nu \phi + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \delta\phi\right]
$$

ここで、δS_{m} の第 3 項と第 4 項は等しく、これについて、表面項（下線部）を 0 として

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \delta\phi\, \partial_\nu \phi &= \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \partial_\nu \phi \nabla_\mu \delta\phi \\
&= \underline{\int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} \nabla_\mu (g^{\mu\nu}\, \partial_\nu \phi\, \delta\phi)} - \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, \delta\phi \nabla_\mu (g^{\mu\nu}\, \partial_\nu \phi) \\
&= \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, \delta\phi\, \nabla^\mu \nabla_\mu \phi
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\delta S_{\mathrm{m}} = \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} \left[\delta g^{\mu\nu} \left\{\frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha \phi\, \partial_\beta \phi - \frac{1}{2}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi\right\} + \delta\phi\, \nabla^\mu \nabla_\mu \phi\right] \tag{1.2}
$$

式 (1.1), (1.2) より、運動方程式は

$$
\begin{aligned}
&G_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha \phi\, \partial_\beta \phi - \frac{1}{2}\, \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi = 0 \\
&\nabla^\mu \nabla_\mu \phi = 0
\end{aligned}
$$

■エネルギー・運動量テンソル　エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は

$$
T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S_{\mathrm{m}}}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, \partial_\alpha \phi\, \partial_\beta \phi + \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi
$$

II.

$$S_{\mathrm{EH}} = \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} R$$
$$S_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta}$$

とおく。

S_{EH} の変分は式 (1.1) で与えられる。

S_{M} の変分は

$$\delta S_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}x^4 \left[\begin{array}{c} \delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\, \delta g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \\ + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, \delta F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha}\, \delta F_{\nu\beta} \end{array} \right]$$

ここで、$g^{\mu\nu}$ の対称性および $F_{\mu\nu}$ の反対称性より、第 2 項と第 3 項は等しく、第 4 項と第 5 項は等しい。よって

$$\delta S_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}x^4 \left[\delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + 2\sqrt{-g}\, \delta g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + 2\sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, \delta F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \right]$$

ここで、第 3 項について

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, \delta F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} &= \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta}\, \delta(\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu) \\ &= \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta} (\partial_\mu\, \delta A_\alpha - \partial_\alpha\, \delta A_\mu) \\ &= \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta} \left(\nabla_\mu\, \delta A_\alpha - \nabla_\alpha\, \delta A_\mu\right) \end{aligned}$$

$F_{\mu\nu}$ の反対称性より

$$\begin{aligned} \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, \delta F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} &= 2 \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta} \nabla_\mu\, \delta A_\alpha \\ &= 2 \underline{\int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} \nabla_\mu \left(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta}\, \delta A_\alpha\right)} - 2 \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, \delta A_\alpha \nabla_\mu \left(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} F_{\nu\beta}\right) \end{aligned}$$

下線部は表面項であるから 0 として

$$\int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta}\, \delta F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} = -2 \int \mathrm{d}x^4 \sqrt{-g}\, \delta A_\alpha \nabla_\mu F^{\mu\alpha}$$

よって

$$\delta S_{\mathrm{M}} = -\frac{1}{4} \int \mathrm{d}x^4 \left[\delta g^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} g^{\alpha\beta} F_{\lambda\alpha} F_{\rho\beta} + 2 g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} \right) - 4\, \delta A_\alpha \nabla_\mu F^{\mu\alpha} \right] \tag{2.1}$$

式 (1.1), (2.1) より、運動方程式は

$$G_{\mu\nu} + \frac{1}{8} g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} g^{\alpha\beta} F_{\lambda\alpha} F_{\rho\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} = 0$$
$$\nabla_\mu F^{\mu\alpha} = 0$$

■エネルギー・運動量テンソル　エネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ は

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S_{\mathrm{M}}}{\delta g^{\mu\nu}} = g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\lambda\rho} g^{\alpha\beta} F_{\lambda\alpha} F_{\rho\beta}$$