一般相対性理論 演習問題 第 8 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 7 月 8 日

I.

■方針　計量テンソルが対角型であるから、Riemann テンソルの自由度 20 個の成分を計算すると、残りの成分は簡単に求まる。

例えば、対称性

$$R_{\mu\nu\lambda\rho} = R_{\lambda\rho\mu\nu}$$

を用いると、ある i, j, k, l を固定したとき

$$R^i{}_{jkl} = g^{i\alpha} R_{\alpha jkl} = g^{i\alpha} R_{kl\alpha j} = g^{i\alpha} g_{k\beta} R^\beta{}_{l\alpha j} = g^{ii} g_{kk} R^k{}_{lij}$$

■Riemann テンソル　接続係数は、演習問題第 4 回 II の結果を用いる。

$$\begin{aligned}
R^r{}_{trt} &= \Gamma^r_{tt,r} - \Gamma^r_{tr,t} + \Gamma^r_{\alpha r}\Gamma^\alpha_{tt} - \Gamma^r_{\alpha t}\Gamma^\alpha_{tr} = \frac{A_{rr} - B_{tt}}{2A} + \frac{B_t^2 - A_r B_r}{4B^2} + \frac{A_t B_t - A_r^2}{4AB} \\
R^\theta{}_{t\theta t} &= \Gamma^\theta_{tt,\theta} - \Gamma^\theta_{t\theta,t} + \Gamma^\theta_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{tt} - \Gamma^\theta_{\alpha t}\Gamma^\alpha_{t\theta} = \frac{A_r}{2rB} \\
R^\phi{}_{t\phi t} &= \Gamma^\phi_{tt,\phi} - \Gamma^\phi_{t\phi,t} + \Gamma^\phi_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{tt} - \Gamma^\phi_{\alpha t}\Gamma^\alpha_{t\phi} = \frac{A_r}{2rB} \\
R^\theta{}_{r\theta r} &= \Gamma^\theta_{rr,\theta} - \Gamma^\theta_{r\theta,r} + \Gamma^\theta_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{rr} - \Gamma^\theta_{\alpha r}\Gamma^\alpha_{r\theta} = \frac{B_r}{2rB} \\
R^\phi{}_{r\phi r} &= \Gamma^\phi_{rr,\phi} - \Gamma^\phi_{r\phi,r} + \Gamma^\phi_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{rr} - \Gamma^\phi_{\alpha r}\Gamma^\alpha_{r\phi} = \frac{B_r}{2rB} \\
R^\phi{}_{\theta\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{\theta\theta,\phi} - \Gamma^\phi_{\theta\phi,\theta} + \Gamma^\phi_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{\theta\theta} - \Gamma^\phi_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{\theta\phi} = 1 - \frac{1}{B} \\
R^\theta{}_{t\theta r} &= \Gamma^\theta_{tr,\theta} - \Gamma^\theta_{t\theta,r} + \Gamma^\theta_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{tr} - \Gamma^\theta_{\alpha r}\Gamma^\alpha_{t\theta} = \frac{B_t}{2rB} \\
R^\phi{}_{t\phi r} &= \Gamma^\phi_{tr,\phi} - \Gamma^\phi_{t\phi,r} + \Gamma^\phi_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{tr} - \Gamma^\phi_{\alpha r}\Gamma^\alpha_{t\phi} = \frac{B_t}{2rB} \\
R^r{}_{tr\theta} &= \Gamma^r_{t\theta,r} - \Gamma^r_{tr,\theta} + \Gamma^r_{\alpha r}\Gamma^\alpha_{t\theta} - \Gamma^r_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{tr} = 0 \\
R^\phi{}_{t\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{t\theta,\phi} - \Gamma^\phi_{t\phi,\theta} + \Gamma^\phi_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{t\theta} - \Gamma^\phi_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{t\phi} = 0 \\
R^r{}_{tr\phi} &= \Gamma^r_{t\phi,r} - \Gamma^r_{tr,\phi} + \Gamma^r_{\alpha r}\Gamma^\alpha_{t\phi} - \Gamma^r_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{tr} = 0 \\
R^\theta{}_{t\theta\phi} &= \Gamma^\theta_{t\phi,\theta} - \Gamma^\theta_{t\theta,\phi} + \Gamma^\theta_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{t\phi} - \Gamma^\theta_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{t\theta} = 0 \\
R^t{}_{rt\theta} &= \Gamma^t_{r\theta,t} - \Gamma^t_{rt,\theta} + \Gamma^t_{\alpha t}\Gamma^\alpha_{r\theta} - \Gamma^t_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{rt} = 0 \\
R^\phi{}_{r\phi\theta} &= \Gamma^\phi_{r\theta,\phi} - \Gamma^\phi_{r\phi,\theta} + \Gamma^\phi_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{r\theta} - \Gamma^\phi_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{r\phi} = 0 \\
R^t{}_{rt\phi} &= \Gamma^t_{r\phi,t} - \Gamma^t_{rt,\phi} + \Gamma^t_{\alpha t}\Gamma^\alpha_{r\phi} - \Gamma^t_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{rt} = 0 \\
R^\theta{}_{r\theta\phi} &= \Gamma^\theta_{r\phi,\theta} - \Gamma^\theta_{r\theta,\phi} + \Gamma^\theta_{\alpha\theta}\Gamma^\alpha_{r\phi} - \Gamma^\theta_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{r\theta} = 0 \\
R^t{}_{\theta t\phi} &= \Gamma^t_{\theta\phi,t} - \Gamma^t_{\theta t,\phi} + \Gamma^t_{\alpha t}\Gamma^\alpha_{\theta\phi} - \Gamma^t_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{\theta t} = 0 \\
R^r{}_{\theta r\phi} &= \Gamma^r_{\theta\phi,r} - \Gamma^r_{\theta r,\phi} + \Gamma^r_{\alpha r}\Gamma^\alpha_{\theta\phi} - \Gamma^r_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{\theta r} = 0 \\
R^t{}_{r\theta\phi} &= \Gamma^t_{r\theta,t} - \Gamma^t_{rt,\phi} + \Gamma^t_{\alpha t}\Gamma^\alpha_{r\theta} - \Gamma^t_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{rt} = 0 \\
R^t{}_{\theta\phi r} &= \Gamma^t_{\theta\phi,t} - \Gamma^t_{\theta t,r} + \Gamma^t_{\alpha t}\Gamma^\alpha_{\theta\phi} - \Gamma^t_{\alpha\phi}\Gamma^\alpha_{\theta t} = 0 \\
R^t{}_{\phi r\theta} &= -R^t{}_{r\theta\phi} - R^t{}_{\theta\phi r} = 0
\end{aligned}$$

■Ricci テンソル

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= R^r{}_{trt} + R^\theta{}_{t\theta t} + R^\phi{}_{t\phi t} = \frac{A_{rr} - B_{tt}}{2A} + \frac{B_t^2 - A_r B_r}{4B^2} + \frac{A_t B_t - A_r^2}{4AB} + \frac{A_r}{rB} \\
R_{rr} &= g^{tt} g_{rr} R^r{}_{trt} + R^\theta{}_{r\theta r} + R^\phi{}_{r\phi r} = \frac{B_{tt} - A_{rr}}{2A} + \frac{A_r B_r - B_t^2}{4AB} + \frac{A_r^2 - A_t B_t}{4A^2} + \frac{B_r}{rB}
\end{aligned}$$

$$R_{\theta\theta} = g^{tt}g_{\theta\theta}R^{\theta}{}_{t\theta t} + g^{rr}g_{\theta\theta}R^{\theta}{}_{r\theta r} + R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1 - \frac{1}{B} + \frac{rB_r}{2B^2} - \frac{rA_r}{2AB}$$
$$R_{\phi\phi} = g^{tt}g_{\phi\phi}R^{\phi}{}_{t\phi t} + g^{rr}g_{\phi\phi}R^{\phi}{}_{r\phi r} + g^{\theta\theta}g_{\phi\phi}R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = \sin^2\theta R_{\theta\theta}$$
$$R_{tr} = R^{\theta}{}_{t\theta r} + R^{\phi}{}_{t\phi r} = \frac{B_t}{rB}$$
$$R_{t\theta} = R^{r}{}_{tr\theta} + R^{\phi}{}_{t\phi\theta} = 0$$
$$R_{t\phi} = R^{r}{}_{tr\phi} + R^{\theta}{}_{t\theta\phi} = 0$$
$$R_{r\theta} = R^{t}{}_{rt\theta} + R^{\phi}{}_{r\phi\theta} = 0$$
$$R_{r\phi} = R^{t}{}_{rt\phi} + R^{\theta}{}_{r\theta\phi} = 0$$
$$R_{\theta\phi} = R^{t}{}_{\theta t\phi} + R^{r}{}_{\theta r\phi} = 0$$

■Ricci スカラー

$$R = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} = \frac{B_{tt} - A_{rr}}{AB} + \frac{A_rB_r - B_t^2}{2AB^2} + \frac{A_r^2 - A_tB_t}{2A^2B} + \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2B} + \frac{2B_r}{rB^2} - \frac{2A_r}{rAB}$$

■Einstein テンソル

$$G_{tt} = R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R = \frac{A}{r^2} - \frac{A}{r^2B} + \frac{AB_r}{rB^2}$$
$$G_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R = -\frac{B}{r^2} + \frac{1}{r^2} - \frac{A_r}{rA}$$
$$G_{\theta\theta} = R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}g_{\theta\theta}R = -r^2\frac{B_{tt} - A_{rr}}{2AB} - r^2\frac{A_rB_r - B_t^2}{4AB^2} - r^2\frac{A_r^2 - A_tB_t}{4A^2B} - \frac{rB_r}{2B^2} + \frac{rA_r}{2AB}$$
$$G_{\phi\phi} = R_{\phi\phi} - \frac{1}{2}g_{\phi\phi}R = \sin^2\theta G_{\theta\theta}$$
$$G_{tr} = R_{tr} - \frac{1}{2}g_{tr}R = \frac{B_t}{rB}$$
$$G_{t\theta} = R_{t\theta} - \frac{1}{2}g_{t\theta}R = 0$$
$$G_{t\phi} = R_{t\phi} - \frac{1}{2}g_{t\phi}R = 0$$
$$G_{r\theta} = R_{r\theta} - \frac{1}{2}g_{r\theta}R = 0$$
$$G_{r\phi} = R_{r\phi} - \frac{1}{2}g_{r\phi}R = 0$$
$$G_{\theta\phi} = R_{\theta\phi} - \frac{1}{2}g_{\theta\phi}R = 0$$

■Einstein 方程式　真空中の Einstein 方程式は

$$G_{\mu\nu} = 0$$

である。

$G_{rr} \times r^2A + G_{rr} \times rAB = 0$ より

$$AB_r + A_rB = 0$$
$$\therefore \frac{\partial}{\partial r}(AB) = 0$$

よって

$$AB = C$$

となる。ここで、C は積分定数で、t の関数である。

$G_{tr} \times rB = 0$ より

$$rA + A_r = AB$$
$$\therefore \frac{\partial}{\partial r}\frac{rA}{C} = 1$$

よって

$$\frac{rA}{C} = r + D$$

となる。ここで、D は積分定数で、t の関数である。

$G_{tr} \times rB = 0$ より

$$\begin{aligned}
&B_t = 0\\
&\therefore -\left(C_t + \frac{D_t}{r}\right)\left(C + \frac{D}{r}\right)^{-2} = 0\\
&\therefore C_t + \frac{D_t}{r} = 0
\end{aligned}$$

r は任意だから

$$C_t = 0, \quad D_t = 0$$

つまり、C, D は t に依らない定数である。

以上より

$$A(t,r) = C\left(1 + \frac{D}{r}\right), \quad B(t,r) = \left(1 + \frac{D}{r}\right)^{-1}$$

ここで、Newton 極限では

$$g_{tt} = A(t,r) = 1 + 2\phi_N = 1 - \frac{2GM}{r}$$

であるから、

$$A(t,r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad B(t,r) = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

を得る。

II.

対称性より

$$\begin{aligned}
R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = {}& 4g^{tt}g^{tt}({R^r}_{trt})^2 + 4g^{tt}g^{tt}({R^\theta}_{t\theta t})^2 + 4g^{tt}g^{tt}({R^\phi}_{t\phi t})^2 + 4g^{rr}g^{rr}({R^\theta}_{r\theta r})^2 + 4g^{rr}g^{rr}({R^\phi}_{r\phi r})^2 + 4g^{\theta\theta}g^{\theta\theta}({R^\phi}_{\theta\phi\theta})^2\\
&+ 8g^{tt}g^{rr}\{({R^\theta}_{t\theta r})^2 + ({R^\phi}_{t\phi r})^2\} + 8g^{tt}g^{\theta\theta}\{({R^r}_{tr\theta})^2 + ({R^\phi}_{t\phi\theta})^2\} + 8g^{tt}g^{\phi\phi}\{({R^r}_{tr\phi})^2 + ({R^\theta}_{t\theta\phi})^2\}\\
&+ 8g^{rr}g^{\theta\theta}\{({R^t}_{rt\theta})^2 + ({R^\phi}_{r\phi\theta})^2\} + 8g^{rr}g^{\phi\phi}\{({R^t}_{rt\phi})^2 + ({R^\theta}_{r\theta\phi})^2\} + 8g^{\theta\theta}g^{\phi\phi}\{({R^t}_{\theta t\phi})^2 + ({R^r}_{\theta r\phi})^2\}\\
&+ 8g_{tt}g^{rr}g^{\theta\theta}g^{\phi\phi}\{({R^t}_{r\theta\phi})^2 + ({R^t}_{\theta\phi r})^2 + ({R^t}_{\phi r\theta})^2\}
\end{aligned}$$

が成り立つ。

問 I で計算した Riemann テンソルの成分を代入し、

$$A_t = 0, \quad B_t = 0, \quad B = A^{-1}, \quad B_r = -A^{-2}A_r$$

を用いると、

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = A_{rr}^2 + 4r^{-2}A_r^2 + 4r^{-4}(1-A)^2$$

を得る。ここで、$A = 1 - 2GM/r$ であるから、

$$R^{\mu\nu\lambda\rho}R_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{48G^2M^2}{r^6}$$