一般相対性理論 演習問題 第 9 回

2243117S 佐野博亮

2024 年 7 月 17 日

I.

動径方向の測地線方程式およびエネルギー保存則より

$$1 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$

よって

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)$$

ここで、内向きの運動を考えると

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = -\sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)}$$

が成り立つ。

■固有時間　$r = r_0 > 2GM$ から $r = 2GM$ に至るまでの固有時間 τ は

$$\begin{aligned}
\tau &= -\int_{r_0}^{2GM} \left(E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r \\
&\leq \int_{2GM}^{r_0} \left(E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r_0}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r \\
&= (r_0 - 2GM)\left(E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r_0}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

より、τ は有限である。

■座標時間

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \left(E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} E\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}$$

$r = r_0 > 2GM$ から $r = 2GM$ に至るまでの座標時間 t は

$$\begin{aligned}
t &= -\int_{r_0}^{2GM} \left(E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} E\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r \\
&\geq \int_{2GM}^{r_0} \left(E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{2GM}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} E\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r \\
&= \left(E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{2GM}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} E\int_{2GM}^{r_0} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \mathrm{d}r \\
&= \infty
\end{aligned}$$

より、t は無限大である。

II.

■保存量の構成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u^\mu \xi_\mu) &= \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial}{\partial x^\nu}(u^\mu \xi_\mu)\\ &= u^\nu \nabla_\nu (u^\mu \xi_\mu)\\ &= u^\nu (\nabla_\nu u^\mu)\xi_\mu + u^\nu u^\mu \nabla_\nu \xi_\mu\\ &= \underline{(u^\nu \nabla_\nu u^\mu)}\xi_\mu + \frac{1}{2}u^\nu u^\mu \underline{(\nabla_\nu \xi_\mu + \nabla_\mu \xi_\nu)}\end{aligned}$$

ここで、第 1 項は測地線方程式より 0 であり、第 2 項は Killing ベクトルの性質より 0 である。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(u^\mu \xi_\mu) = 0$$

よって、$u^\mu \xi_\mu$ は保存量である。

■筆者が見つけた解　筆者が見つけた Killing ベクトルは以下の通りである。

$$\begin{aligned}\xi_0 &= \frac{\partial}{\partial t}\\ \xi_1 &= -\sin\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\\ \xi_2 &= \cos\phi\frac{\partial}{\partial \theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial \phi}\\ \xi_3 &= \frac{\partial}{\partial \phi}\end{aligned}$$

また、それに対応する保存量は以下の通りである。

$$\begin{aligned}E &= -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\frac{\partial t}{\partial \tau}\\ L_1 &= -r^2\sin\phi\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - r^2\sin\theta\cos\theta\cos\phi\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\\ L_2 &= r^2\cos\phi\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - r^2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\\ L_3 &= r^2\sin^2\theta\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\end{aligned}$$

ここでは、

$$u^\mu \xi_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu \xi^\nu$$

を用いて保存量を構成した。

■参考　E は時間並進対称性によるエネルギー、L_1, L_2, L_3 は空間回転対称性による角運動量である。

一般に、4 次元時空における独立な Killing ベクトルは最大 10 個である。t, x, y, z の並進対称性 4 個、tx, ty, tz, xy, yz, zx の回転対称性 6 個である。

■循環座標　作用を見ると、循環座標から Killing ベクトルおよび保存量を見つけることができる。本問では ξ_0, ξ_3 および E, L_3 が相当する。

計量より

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau \left[-\left(1-\frac{2GM}{r}\right)\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + r^2\sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right]$$

係数に t, ϕ が含まれていないので、これらが循環座標である。このことから、ξ_0, ξ_3 および E, L_3 が見つかる。

■時間並進対称性　時間並進対称性から ξ_0 が Killing ベクトルであることが分かる。

■空間回転対称性　空間回転対称性から ξ_1, ξ_2, ξ_3 が Killing ベクトルであることが分かる。

回転を用いて

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -z\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial z} \\ \xi_2 &= -x\frac{\partial}{\partial z} + z\frac{\partial}{\partial x} \\ \xi_3 &= -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

とできる。座標変換

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta$$

を行う。Jacobi 行列は

$$J = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r & \\ & & r\sin\theta \end{bmatrix}$$

下線部は直交行列だから、逆行列は

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r^{-1} & \\ & & r^{-1}\csc\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ r^{-1}\cos\theta\cos\phi & r^{-1}\cos\theta\sin\phi & -r^{-1}\sin\theta \\ -r^{-1}\csc\theta\sin\phi & r^{-1}\csc\theta\cos\phi & 0 \end{bmatrix}$$

上の ξ_1, ξ_2, ξ_3 について

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} J^{-1}$$

を用いると

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \xi_2 &= \cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} \\ \xi_3 &= \frac{\partial}{\partial\phi} \end{aligned}$$

と分かる。