12.4 Smooth Sections

佐野博亮

2024 年 12 月 10 日

切断

定義：切断；Sections

$\pi\colon E \to M$ をベクトルバンドル、$s\colon M \to E$ を写像とし、

$$\pi \circ s = \mathbb{1}_M$$

が成り立つものとする。このとき、写像 s をベクトルバンドル E の切断と言う。

切断 $s\colon M \to E$ がなめらかな多様体の間のなめらかな写像であるとき、s をなめらかな切断と言う。

切断

定義：ベクトル場；Vector Fields

接バンドル $\pi\colon TM \to M$ の切断をベクトル場と言う。
ベクトル場 X がなめらかな切断であるとき、X をなめらかなベクトル場と言う。

例：なめらかなベクトル場

$$X_{(x,y)} = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

は $\mathbb{R}^2$ 上のなめらかなベクトル場を定める。

切断と自明化

$\pi\colon E \to M$ をベクトルバンドル、$s\colon M \to E$ を E の切断、$\phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ を開集合 U の上の E の自明化として次の写像を考える。

$$\phi \circ s|_U : U \to U \times \mathbb{R}^r$$

- U について。射影を $\pi' : U \times \mathbb{R}^r \to U$ と定めると、ϕ はファイバーを保つので、

$$\pi' \circ \phi \circ s|_U = \pi \circ s|_U = \mathbb{1}_U$$

  が成り立つ。したがって、$\phi \circ s|_U$ の U 成分は $\mathbb{1}_U : U \to U$ である。
- $\mathbb{R}^r$ について。$\mathbb{R}^r$ に標準座標を入れ、$\phi \circ s|_U$ の $\mathbb{R}^r$ の第 i 成分を $a^i : U \to \mathbb{R}$ とする。

このとき、切断 s は次のように表される。

$$(\phi \circ s)(p) = (p, a^1(p), \ldots, a^r(p)) \qquad (p \in U)$$

切断と自明化

なめらかな切断の言いかえ

$$s|_U \text{ がなめらか} \iff a^1, \ldots, a^r \text{ がすべてなめらか}$$

- ($\Longrightarrow$)ϕ は自明化だからなめらか、$s|_U$ は仮定よりなめらかであるから、$\phi \circ s|_U$ はなめらかである。命題 6.16 より、その成分 a^i はなめらかである。
- ($\Longleftarrow$)π' は射影だからなめらか、a^i は仮定よりなめらかである。したがって、その直積である $\phi \circ s|_U$ はなめらかである。ϕ は自由化ゆえに ϕ^{-1} はなめらかであるから、

$$s|_U = \phi^{-1} \circ (\phi \circ s|_U)$$

はなめらかである。

切断

命題 12.9

$\pi\colon E \to M$ を C^∞ 級ベクトルバンドル、s, t を E の C^∞ 級切断、$f\colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする。このとき

- $s+t$ は E の C^∞ 級切断である。ここで、$s+t\colon M \to E$ を次式で定める。

$$(s+t)(p) = s(p) + t(p) \qquad (p \in M)$$

- fs は E の C^∞ 級切断である。ここで、$fs\colon M \to E$ を次式で定める。

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \qquad (p \in M)$$

切断

証明①

$s+t$ が E の切断であることを示す

任意の $p \in M$ に対して

$$s(p) \in \pi^{-1}(p), \quad t(p) \in \pi^{-1}(p)$$

であり、$\pi^{-1}(p)$ はベクトル空間であるから、

$$s(p) + t(p) \in \pi^{-1}(p)$$

したがって

$$\pi \circ (s+g) = \mathbb{1}_M$$

が成り立つ。すなわち、$s+t$ は E の切断である。

切断

証明②

$s+t$ がなめらかであることを示す

任意の $p \in M$ を与える。p の自明化近傍 U、自明化 $\phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ が存在する。s, t は共になめらかであるから、なめらかな写像 $a^i\colon U \to \mathbb{R}$, $b^i\colon U \to \mathbb{R}$ が存在して、任意の $q \in U$ について次式が成り立つ。

$$(\phi \circ s)(q) = (q,\, a^1(q), \dots,\, a^r(q)) \qquad (q \in U)$$
$$(\phi \circ t)(q) = (q,\, b^1(q), \dots,\, b^r(q)) \qquad (q \in U)$$

このとき、

$$(\phi \circ (s+t))(q) = (q,\, a^1(q) + b^1(q),\, \dots,\, a^r(q) + b^r(q)) \qquad (q \in U)$$

ここで、$a^i + b^i$ はなめらかであるから、$s+t$ はなめらかである。 ■