# 12.5 Smooth Frames

佐野博亮

2024 年 12 月 10 日

# 枠

## 表記：ファイバー

ベクトルバンドル $\pi\colon E \to M$ に対し、$p \in M$ に対するファイバーを次のように書く。

$$E_p := \pi^{-1}(p)$$

## 定義：枠；Frames

$\pi\colon E \to M$ をベクトルバンドル、$U \subset M$ を開集合、$s_1, \dots, s_r$ を $U$ 上の $E$ の切断とする。任意の $p \in U$ に対し、$s_1(p), \dots, s_r(p)$ が $\pi^{-1}(p)$ の基底をなすとき、$s_1, \dots, s_r$ を $E$ の $U$ 上の枠と言う。$s_1, \dots, s_r$ が $U$ 上の $E$ の切断としてなめらかであるとき、$s_1, \dots, s_r$ を $E$ の $U$ 上のなめらかな枠であるという。

$U$ 上の接バンドル $TM \to M$ の枠を、単純に $U$ 上の枠と言う。

# 枠

**例**

$M = \mathbb{R}^3$ の接バンドル $TM \to M$ の枠として

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$$

がある。

**例**

$M$ を多様体、$e_1, \ldots, e_r$ を $\mathbb{R}^r$ の標準基底とする。写像 $\bar{e}_i \colon M \to M \times \mathbb{R}^r$ を

$$\bar{e}_i(p) := (p, e_i)$$

で定める。このとき、$\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r$ は積バンドル $M \times \mathbb{R}^r \to M$ のなめらかな枠である。

# 枠と自明化

**例**

$\pi\colon E \to M$ をランク $r$ のなめらかなベクトルバンドル、$\phi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ を開集合 $U$ 上の $E$ の自明化とする。このとき $\phi^{-1}$ は $U \times \mathbb{R}^r$ のなめらかな枠 $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_r$ を $U$ 上の $E$ のなめらかな枠に写す。すなわち、写像 $t_i\colon U \to E$ を

$$t_i(p) = \phi^{-1}(\bar{e}_i(p)) = \phi^{-1}(p, e_i) \qquad (p \in U)$$

と定めると、$t_1, \ldots, t_r$ は $E$ の $U$ 上のなめらかな枠である。これを自明化 $\phi$ の $U$ 上のなめらかな枠と言う。

# 枠と自明化

### 補題 12.11

$\pi\colon E \to M$ をランク $r$ のなめらかなベクトルバンドル、$U \subset M$ を開集合、$t_1, \ldots, t_r$ を $\phi$ の $U$ 上のなめらかな枠とする。$U$ 上の $E$ の切断 $s$ を

$$s(p) = \sum_{i=1}^{r} a^i(p) t_i(p) \qquad (p \in U)$$

と表す。このとき

$$s \text{ が } U \text{ 上でなめらか} \iff a^1, \ldots, a^r \text{ がすべてなめらか}$$

前章で示した。

# なめらかな枠

## 命題 12.12：なめらかな枠の表現

$\pi\colon E \to M$ をランク $r$ のなめらかなベクトルバンドル、$s_1, \ldots, s_r$ を開集合 $U$ 上の $E$ のなめらかな枠とする。$U$ 上の $E$ の切断 $s$ を

$$s(p) = \sum_{i=1}^{r} c^i(p) s_i(p) \qquad (p \in U)$$

と表す。このとき

$$s \text{ が } U \text{ 上でなめらか} \iff c^1, \ldots, c^r \text{ がすべてなめらか}$$