8.1 The Tangent Space at a Point

佐 野 博 亮

2024 年 9 月 10 日

芽

芽

多様体 M の点 p が与えられたとする。p の近傍から $\mathbb{R}$ への C^∞ 関数について、定義域と関数の組の 2 項関係を次で定める。

(f, U), (g, V) に対して、

$$f \sim g \iff {}^\exists W \in \mathcal{O};\ W \subset (U \cap V),\ p \in W \text{ s.t. } f|_W = g|_W$$

これは同値関係である。この同値関係に関する同値類を多様体 M の点 p における C^∞ 関数の芽と言う。点 p における C^∞ 関数の芽全体の集合を $C_p^\infty(M)$ と書く。

芽

$C_p^\infty(M)$ は、写像の和と積および実数倍をもって $\mathbb{R}$ 上の代数をなす。

ここでは、和について well-defined であることを示す。

$(f_1, U_1) \sim (f_2, U_2)$, $(g_1, V_1) \sim (g_2, V_2)$ とする。関数の和は次のように定義される。

$$f_1 + g_1 \colon (U_1 \cap V_1) \longrightarrow \mathbb{R};\ q \mapsto (f_1(q) + g_1(q))$$

$$f_2 + g_2 \colon (U_2 \cap V_2) \longrightarrow \mathbb{R};\ q \mapsto (f_2(q) + g_2(q))$$

ここで、p の開近傍 $U \subset (U_1 \cap U_2)$, $V \subset (V_1 \cap V_2)$ が存在し、$f_1|_U = f_2|_U$, $g_1|_V = g_2|_V$ が成り立つ。よって、p の開近傍 $W = U \cap V$ を定めると、

$$^\forall q \in W;\ (f_1 + g_1)(q) = f_1(q) + g_1(q) = f_2(q) + g_2(q) = (f_2 + g_2)(q)$$

すなわち $(f_1 + g_1) \sim (f_2 + g_2)$ が成り立つ。 ■

接空間

$C_p^\infty(M)$ は $\mathbb{R}$ 代数であるから、もちろん $\mathbb{R}$ 線形空間である。

導分

多様体 M の点 p が与えられたとする。$\mathbb{R}$ 線形写像 $D\colon C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ で、Leibniz 則を満たすものを点 p における導分と言う。

$$D(fg) = D(f)g(p) + f(p)D(g)$$

well-defined であることは、$(f, U) \sim (g, V)$ のとき $f(p) = g(p)$ であることから従う。

接空間

導分は $\mathbb{R}$ 線形写像であるから、導分全体の集合は $\mathbb{R}$ 線形空間をなす。

接空間

多様体 M の点 p が与えられたとする。点 p における導分を点 p における接ベクトルと言う。点 p における接ベクトル全体のなす線形空間を点 p における接空間と言い、$T_p(M)$ あるいは T_pM と書く。

多様体 M の点 p の開近傍 U に対して、$C_p^\infty(U) = C_p^\infty(M)$ であるから $T_p(U) = T_p(M)$ が成り立つ。

偏微分

偏微分

n 次元多様体 M の点 p における座標近傍 $(U, \phi) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ が与えられたとする。$\mathbb{R}^n$ の標準座標を $r^1, \ldots, r^n$ とすると、$x^i = r^i \circ \phi$ である。p の近傍から $\mathbb{R}$ への C^∞ 関数 f の**偏微分**は次のように定義される。

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f := \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)} \left(f \circ \phi^{-1}\right)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{(1)} \arrow[d, dash, dotted] & U \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "x^i"'] \arrow[dd, "\phi"'] & \mathbb{R} \\
\mathbb{R}^{(i)} \arrow[d, dash, dotted] & & \\
\mathbb{R}^{(n)} & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "r^i"] \arrow[uur, "f\circ\phi^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

偏微分

偏微分 $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$ は点 p における接ベクトルである。

以下を示せば良い。

- Well-defined であること
- 線形写像であること
- Leibniz 則を満たすこと

偏微分

証明

まず、偏微分が $C_p^\infty(M)$ から $\mathbb{R}$ への写像として well-defined であることを示す。

$(f,U)\sim(g,V)$ とする。p の開近傍 $W\subset(U\cap V)$ が存在し、$f|_W=g|_W$ が成り立つ。よって

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}(f\circ\phi^{-1})\big|_{\phi(W)} &= \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}\left(f|_W\circ\phi|_W^{-1}\right)\\ &= \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}\left(g|_W\circ\phi|_W^{-1}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}(g\circ\phi^{-1})\big|_{\phi(W)}\end{aligned}$$

実関数の偏微分は定義域を制限しても変わらないから、

$$\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}\left(f\circ\phi^{-1}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}\left(g\circ\phi^{-1}\right) \qquad \therefore \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p g$$

偏微分

証明

次に、線形写像であることを示す。実数倍について

$f \in C_p^\infty(M),\ a \in \mathbb{R}$ とする。$^\forall q \in \phi(U)$ に対し、

$$\begin{aligned}\big((af)\circ\phi^{-1}\big)(q) &= (af)\big(\phi^{-1}(q)\big) = af\big(\phi^{-1}(q)\big)\\ &= a\big(f\circ\phi^{-1}\big)(q) = \big(a\big(f\circ\phi^{-1}\big)\big)(q)\end{aligned}$$

より、$(af)\circ\phi^{-1} = a\big(f\circ\phi^{-1}\big)$ が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (af) &= \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_p \big((af)\circ\phi^{-1}\big) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)} \big(a\big(f\circ\phi^{-1}\big)\big)\\ &= a\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)} (f\circ\phi^{-1}) = a\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f\end{aligned}$$

偏微分

証明

和について

$f, g \in C_p^\infty(M)$ とする。${}^\forall q \in \phi(U)$ に対し、

$$\begin{aligned}\left((f+g)\circ\phi^{-1}\right)(q) &= (f+g)\left(\phi^{-1}(q)\right) = f\left(\phi^{-1}(q)\right) + g\left(\phi^{-1}(q)\right) \\ &= \left(f\circ\phi^{-1}\right)(q) + \left(g\circ\phi^{-1}\right)(q) = \left(\left(f\circ\phi^{-1}\right) + \left(g\circ\phi^{-1}\right)\right)(q)\end{aligned}$$

より、$(f+g)\circ\phi^{-1} = \left(f\circ\phi^{-1}\right) + \left(g\circ\phi^{-1}\right)$ が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (f+g) &= \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_p \left((f+g)\circ\phi^{-1}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)} \left(\left(f\circ\phi^{-1}\right) + \left(g\circ\phi^{-1}\right)\right) \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)} \left(f\circ\phi^{-1}\right) + \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_p \left(g\circ\phi^{-1}\right) = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f + \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p g\end{aligned}$$

偏微分

証明

最後に、Leibniz 則を示す。

$f, g \in C_p^\infty(M)$ とする。${}^\forall q \in \phi(U)$ に対し、

$$\begin{aligned}\big((fg)\circ\phi^{-1}\big)(q) &= (fg)\big(\phi^{-1}(q)\big) = f\big(\phi^{-1}(q)\big)g\big(\phi^{-1}(q)\big)\\ &= \big(f\circ\phi^{-1}\big)(q)\big(g\circ\phi^{-1}\big)(q) = \Big(\big(f\circ\phi^{-1}\big)\big(g\circ\phi^{-1}\big)\Big)(q)\end{aligned}$$

より、$(fg)\circ\phi^{-1} = \big(f\circ\phi^{-1}\big)\big(g\circ\phi^{-1}\big)$ が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p (fg) &= \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)} \big((fg)\circ\phi^{-1}\big) = \left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)} \Big(\big(f\circ\phi^{-1}\big)\big(g\circ\phi^{-1}\big)\Big)\\ &= \left\{\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}\big(f\circ\phi^{-1}\big)\right\}g(p) + f(p)\left\{\left.\frac{\partial}{\partial r^i}\right|_{\phi(p)}\big(g\circ\phi^{-1}\big)\right\} = \left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p f\right\}g(p) + f(p)\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p g\right\}\end{aligned}$$

以上より、偏微分が点 p における接ベクトルであることが示された。 ■

表記法

1 次元多様体においては、$\left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_p$ を $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right|_p$ と書くことがある。

点が明らかな場合は、$\left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_p$ を $\dfrac{\partial}{\partial x}$ と書くことがある。