8.2 The Differential of a Map

佐 野 博 亮

2024 年 9 月 10 日

微分

微分

N, M を多様体とし、C^∞ 写像 $F\colon N \longrightarrow M$ が与えられたとする。$p \in N$ に対し、次で定まる写像

$$F_* \colon T_p(N) \longrightarrow T_{F(p)}(M)$$

あるいは $F_{*,p}$ を、微分という。

${}^\forall X_p \in T_p(N)$ に対し、$F_*(X_p) \in T_{F(p)}(M)$ は次式で定まる。

$${}^\forall f \in C^\infty_{F(p)}(M);\ (F_*(X_p))f = X_p(f \circ F)$$

$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ とする。$U \in N$ は開集合であり F は連続写像だから、$F^{-1}(U) \in M$ は開集合である。
f, F は共に C^∞ だから、合成写像

$$f \circ F \colon F^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

は C^∞ である。よって、$\bigl(f \circ F, F^{-1}(U)\bigr) \in C^\infty_p(N)$ と言える。

微分

Exercise 8.3

1. $F_*(X_p)$ が $F(p) \in M$ における導分であることを示せ。
2. $F_* : T_p(N) \longrightarrow T_{F(p)}(M)$ が線形写像であることを示せ。

微分

Exercise 8.3 (1)

まず、$F_*(X_p)\colon C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ への写像として well-defined であることを示す。

$(f,U) \sim (g,V)$ とする。p の開近傍 $W \subset (U \cap V)$ が存在し、$f|_W = g|_W$ が成り立つ。このとき、

$$(f \circ F, F^{-1}(U)) \sim (\,f|_W \circ F|_{F^{-1}(W)}\,, F^{-1}(W)) \sim (\,g|_W \circ F|_{F^{-1}(W)}\,, F^{-1}(W)) \sim (g \circ F, F^{-1}(V))$$

だから、

$$X_p(f \circ F) = X_p(g \circ F)$$

したがって、

$$(F_*(X_p))f = (F_*(X_p))g$$

が成り立つ。

微分

Exercise 8.3 (1)

次に、$F_*(X_p)\colon C_p^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ が線形写像であることを示す。実数倍について

$(f, U) \in C_{F(p)}^\infty(M),\ a \in \mathbb{R}$ とする。$^\forall q \in F^{-1}(U)$ に対し、

$$((af)\circ F)(q) = (af)(F(q)) = a(f(F(q)) = a(f \circ F)(q) = (a(f \circ F))(q)$$

より、$(af)\circ F = a(f \circ F)$ が成り立つ。したがって、$X_p\colon C_p^\infty(N) \longrightarrow \mathbb{R}$ の線型性を用いると

$$(F_*(X_p))(af) = X_p((af)\circ F) = X_p(a(f \circ F)) = a(X_p(f \circ F)) = a((F_*(X_p))(f))$$

微分

Exercise 8.3 (1)

次に、和について

$(f,U),(g,V) \in C^{\infty}_{F(p)}(M)$ とする。${}^{\forall}q \in F^{-1}(U \cap V)$ に対し、

$$
\begin{aligned}
((f+g)\circ F)(q) &= (f+g)(F(q)) = f(F(q)) + g(F(q)) \\
&= (f\circ F)(q) + (g\circ F)(q) = (f\circ F + g\circ F)(q)
\end{aligned}
$$

より、$(f+g)\circ F = f\circ F + g\circ F$ が成り立つ。したがって、$X_p\colon C^{\infty}_p(N) \longrightarrow \mathbb{R}$ の線型性を用いると

$$
\begin{aligned}
(F_*(X_p))(f+g) &= X_p((f+g)\circ F) = X_p(f\circ F + g\circ F) \\
&= X_p(f\circ F) + X_p(g\circ F) = (F_*(X_p))(f) + (F_*(X_p))(g)
\end{aligned}
$$

微分

Exercise 8.3 (1)

最後に、$F_*(X_p)$ が Leibniz 則を満たすことを示す。

$(f, U), (g, V) \in C^\infty_{F(p)}(M)$ とする。$^\forall q \in F^{-1}(U \cap V)$ に対し、

$$\begin{aligned}((fg) \circ F)(q) &= (fg)(F(q)) = f(F(q))\, g(F(q)) \\ &= (f \circ F)(q)\, (g \circ F)(q) = ((f \circ F)(g \circ F))(q)\end{aligned}$$

より、$(fg) \circ F = (f \circ F)(g \circ F)$ が成り立つ。したがって、X_p についての Leibniz 則を用いると

$$\begin{aligned}(F_*(X_p))(fg) &= X_p((fg) \circ F) = X_p((f \circ F)(g \circ F)) \\ &= X_p(f \circ F)\, (g \circ F)(p) + (f \circ F)(p)\, X_p(g \circ F) = (F_*(X_p))(f)\, g(F(p)) + f(F(p))\, (F_*(X_p))(g)\end{aligned}$$

以上より、$F_*(X_p)$ が点 $F(p)$ における導分であることが示された。 ■

微分

Exercise 8.3

1. $F_*(X_p)$ が $F(p) \in M$ における導分であることを示せ。
2. $F_* \colon T_p(N) \longrightarrow T_{F(p)}(M)$ が線形写像であることを示せ。

微分

Exercise 8.3 (2)

$^\forall f \in C^\infty_{F(p)}(M)$ に対して

$$(F_*(aX_p))(f) = (aX_p)(f \circ F) = aX_p(f \circ F) = a(F_*(X_p))(f) = (aF_*(X_p))(f)$$

より、$F_*(aX_p) = aF_*(X_p)$ が成り立つ。

$^\forall f \in C^\infty_{F(p)}(M)$ に対して

$$\begin{aligned}(F_*(X_p + Y_p))(f) &= (X_p + Y_p)(f \circ F) = X_p(f \circ F) + Y_p(f \circ F)\\ &= (F_*(X_p))(f) + (F_*(Y_p))(f) = (F_*(X_p) + F_*(Y_p))(f)\end{aligned}$$

より、$F_*(X_p + Y_p) = F_*(X_p) + F_*(Y_p)$ が成り立つ。

以上より、F_* が線形写像であることが示された。 ■

微分

多様体 M の点 p における恒等写像 $\mathbf{1}_M\colon M \longrightarrow M$ の微分は恒等写像 $\mathbf{1}_{T_p(M)}\colon T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$ である。

${}^\forall X_p \in T_p(M)$ に対して、${}^\forall f \in C_p^\infty(M)$ について

$$((\mathbf{1}_M)_* X_p)(f) = X_p(f \circ \mathbf{1}_M) = X_p(f)$$

が成り立つので、

$$(\mathbf{1}_M)_* X_p = X_p$$

X_p は任意なので

$$(\mathbf{1}_M)_* = \mathbf{1}_{T_p(M)}$$

が成り立つ。 ■

Euclid 空間における微分

Example 8.4

$F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ の微分 $F_*\colon T_p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow T_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$ を考える。これは線形写像であるから、基底による表現を調べる。

$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の座標をそれぞれ $x^1, \ldots, x^n;\ y^1, \ldots, y^m$ とする。$T_p(\mathbb{R}^n), T_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$ の基底としてそれぞれ次がとれる。

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_p; \quad \left.\frac{\partial}{\partial y^1}\right|_{F(p)}, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial y^m}\right|_{F(p)}$$

線形写像 F_* は、$a_j^k \in \mathbb{R}$ を係数として次のように表現できる。

$$F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_k a_j^k \left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_{F(p)} \tag{1}$$

Euclid 空間における微分

写像 F の要素を $F^i = y^i \circ F$ とおく。式 (1) に y^i を代入して

$$(\text{左辺}) = \left(F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)\right)(y^i) = \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p \left(y^i \circ F\right) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)$$

$$(\text{右辺}) = \sum_k a_j^k \left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_{F(p)} y^i = \sum_k a_j^k \delta_k^i = a_j^i$$

よって

$$a_j^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)$$

が成り立つ。

Euclid 空間における微分

線形写像 F_* は、次のように基底を用いて表現できる。

$$F_*\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = \sum_k \frac{\partial F^k}{\partial x^j}(p)\left.\frac{\partial}{\partial y^k}\right|_{F(p)}$$

この係数は Jacobi 行列であるから、多様体の微分は Euclid 空間の微分の一般化であると言える。