

8.3 The Chain Rule

佐野博亮

2024 年 9 月 10 日

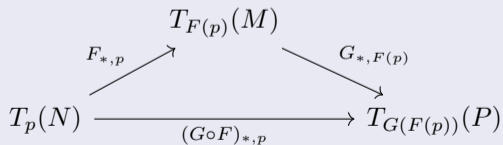
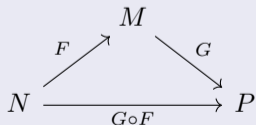
連鎖律

連鎖律

多様体 N, M, P 間の C^∞ 写像 $F: N \rightarrow M$, $G: M \rightarrow P$ および $p \in N$ が与えられたとする。このとき

$$(G \circ F)_{*,p} = G_{*,F(p)} \circ F_{*,p}$$

が成り立つ。



連鎖律

$\forall X_p \in T_p(N)$ に対して、 $\forall f \in C_{G(F(p))}^\infty(P)$ について

$$\begin{aligned} ((G_* \circ F_*)X_p)(f) &= (G_*(F_*X_p))(f) = (F_*X_p)(f \circ G) \\ &= X_p(f \circ G \circ F) = ((G \circ F)_*X_p)(f) \end{aligned}$$

が成り立つので、

$$(G_* \circ F_*)X_p = (G \circ F)_*X_p$$

X_p は任意なので

$$G_* \circ F_* = G \circ F$$

が成り立つ。 ■

系 8.6

多様体の微分同相写像 $F: N \rightarrow M$ および N の点 p が与えられたとする。このとき、 $F_*: T_p(N) \rightarrow T_{F(p)}(M)$ は線形空間の同型写像である。

$F: N \rightarrow M$ は微分同相であるから、逆写像 $G: M \rightarrow N$ が存在し、 $G \circ F = \mathbf{1}_N$, $F \circ G = \mathbf{1}_M$ が成り立つ。Exercise 8.3 より F_*, G_* は共に線形写像である。連鎖律より

$$(G \circ F)_* = G_* \circ F_* = (\mathbf{1}_N)_* = \mathbf{1}_{T_p(N)}$$

$$(F \circ G)_* = F_* \circ G_* = (\mathbf{1}_M)_* = \mathbf{1}_{T_{F(p)}(M)}$$

よって、 F_*, G_* は共に同型写像である。 ■

系 8.7

開集合 $U \subset \mathbb{R}^n, V \subset \mathbb{R}^m$ が微分同相であるとき、 $n = m$ が成り立つ。

微分同相写像を $F: U \rightarrow V$ とし、 $p \in U$ をとる。系 8.6 より、 $F_{*,p}: T_p(U) \rightarrow T_{F(p)}(V)$ は線形空間の同型写像である。線形空間として $T_p(U) \simeq \mathbb{R}^n$ 、 $T_{F(p)}(V) \simeq \mathbb{R}^m$ である。よって、 $n = m$ が成り立つ。 ■