8.7 Computing the Differential Using Curves

佐 野 博 亮

2024 年 10 月 17 日

曲線を用いた微分の計算

命題 8.18. 曲線を用いた微分の計算

N, M を C^∞ 多様体、$F\colon N \longrightarrow M$ を C^∞ 写像とし、$p \in N$, $X_p \in T_p(N)$ とする。c を N の p から始まる C^∞ 曲線で、p での速度ベクトルが X_p であるものとする。このとき

$$F_{*,p}(X_p) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 (F \circ c)(t)$$

が成り立つ。つまり、$F_{*,p}(X_p)$ は $F \circ c$ の $F(p)$ における速度ベクトルである。

曲線を用いた微分の計算

証明

仮定より $c(0) = p,\ c'(0) = X_p$ であるから

$$
\begin{aligned}
F_{*,p}(X_p) &= F_{*,p}(c'(0)) \\
&= (F_{*,p} \circ c_{*,0}) \left(\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_0 \right) \\
&= (F \circ c)_{*,0} \left(\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_0 \right) \\
&= \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \right|_0 (F \circ c)(t)
\end{aligned}
$$

■

曲線を用いた微分の計算

左乗算の微分

$g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ とし、$l_g \colon \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ を g による左乗算、すなわち

$$l_g(B) = gB$$

で定める。このとき、$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ はベクトル空間 $\mathbb{R}^{n \times n}$ の開集合であるから、接空間 $T_g(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$ は $\mathbb{R}^{n \times n}$ と同一視できる。この同一視のもとで $(l_g)_{*,I} \colon T_I(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})) \to T_g(\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}))$ も g による左乗算である。

参考: 例 5.15

曲線を用いた微分の計算

証明

$X \in T_I(\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})) = \mathbb{R}^{n\times n}$ とする。c を $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の I から始まる C^∞ 曲線で、I での速度ベクトルが X であるものとする。命題 8.18 より

$$(l_g)_{*,I}(X) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 l_g(c(t)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_0 gc(t) = gc'(0) = gX$$