8.8 Immersions and Submersions

佐 野 博 亮

2024 年 10 月 17 日

定義

はめ込み

C^∞ 写像 $F\colon N \to M$ が点 $p \in N$ ではめ込みであるとは、微分 $F_{*,p}\colon T_p(N) \to T_{F(p)}(M)$ が単写像であることをいう。F がはめ込みであるとは、F が任意の $p \in N$ ではめ込みであることをいう。

沈め込み

C^∞ 写像 $F\colon N \to M$ が点 $p \in N$ で沈め込みであるとは、微分 $F_{*,p}\colon T_p(N) \to T_{F(p)}(M)$ が全写像であることをいう。F が沈め込みであるとは、F が任意の $p \in N$ で沈め込みであることをいう。

次元

次元

多様体 N, M の次元をそれぞれ n, m とする。C^∞ 写像 $F\colon N \to M$ が点 $p \in N$ ではめ込みであるとき、$n \leq m$ が成り立つ。F が点 $p \in N$ で沈め込みであるとき、$n \geq m$ が成り立つ。

接空間の次元は $T_p(N) = n,\ T_{F(p)}(M) = m$ である。

$F\colon N \to M$ が点 $p \in N$ ではめ込みであるならば、$F_{*,p}\colon T_p(N) \to T_{F(p)}(M)$ は単写像であるから、$n \leq m$ が成り立つ。

$F\colon N \to M$ が点 $p \in N$ で沈め込みであるならば、$F_{*,p}\colon T_p(N) \to T_{F(p)}(M)$ は全写像であるから、$n \geq m$ が成り立つ。

包含写像と射影写像

例 8.21

はめ込みの原型は包含写像である。$n \leq m$ に対して $\iota\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を次で定めたものである。

$$\iota(x^1, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$$

沈め込みの原型は射影写像である。$n \geq m$ に対して $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を次で定めたものである。

$$\pi(x^1, \dots, x^m, x^{m+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^m)$$

第 11 章では、はめ込みと沈め込みについて詳しく扱う。はめ込み定理によると任意のはめ込みは局所的に包含写像であり、沈め込み定理によると任意の沈め込みは局所的に射影写像である。(定理 11.5)

例

M を多様体、U を M の開集合とする。このとき、包含写像 $\iota\colon U \to M$ ははめ込みであり沈め込みである。この例は、沈め込みが全写像であるとは限らないことを示している。