8.9 Rank, and Critical and Regular Points

佐 野 博 亮

2024 年 10 月 17 日

ランク

- 線形変換 $L\colon V \to W$ のランクは像 $L(V) \subset W$ の次元である。
- 行列 A のランクは A の列空間の次元である。

線形変換 L を、V, W の基底を定めて行列 A によって表現すると、L の像 $L(V)$ と A の列空間は一致するので、L のランクと A のランクは一致する。

多様体間の写像の点におけるランク

N, M を C^∞ 多様体、$F\colon N \to M$ を C^∞ 写像とする。点 p に対して $F_{*,p}\colon T_p(N) \to T_{F(p)}(M)$ のランクを点 $p \in N$ における F のランクと言い、$\operatorname{rk} F(p)$ と書く。

ランク

ランクの座標表示

$p \in N$, $F(p) \in M$ の座標近傍としてそれぞれ $(U, x^1, \ldots, x^n)$, $(V, y^1, \ldots, y^m)$ をとると、命題 8.11 より、微分 $F_{*,p}$ の座標表示は Jacobi 行列

$$\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$$

である。よって、

$$\operatorname{rk} F(p) = \operatorname{rk}\left[\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(p)\right]$$

が成り立つ。

微分は座標系に依存しないので、Jacobi 行列のランクも座標系に依存しない。

臨界点と正則点

臨界点と正則点

C^∞ を多様体 N, M、C^∞ 写像 $F\colon N \to M$、点 $p \in N$ を与える。微分 $F_{*,p}\colon T_p(N) \to T_{F(p)}(M)$ が全写像であるとき、つまり F が沈め込みであるとき、点 $p \in N$ は正則点であると言う。そうでないとき、点 $p \in N$ は臨界点であると言う。

M の点 c は、c がある N の臨界点の像であるとき、臨界値であると言う。そうでないとき、正則値であると言う。

正則値は、正則点の像とは定義していない。実際、M の点で $F(N)$ に属さないものも正則値である。

臨界点と正則点

命題 8.23.

C^∞ 多様体 M、実数値関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$、点 $p \in M$ を与える。点 p が臨界点であるのは、ある座標近傍 $(U, x^1, \ldots, x^n)$ に対してすべての偏微分が 0 であるときであり、そのときに限る。

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0 \qquad j = 1, \ldots, n$$

ある座標近傍に対してすべての偏微分が 0 であるとき、任意の座標系に対してすべての偏微分が 0 である。

臨界点と正則点

証明

命題 8.11 より、微分 $f_{*,p}\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(\mathbb{R})$ の座標表示は

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x^1}(p) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x^n}(p) \end{bmatrix}$$

である。$f_{*,p}$ の像は $\mathbb{R}$ の部分空間であるから、その次元は 0 または 1 である。よって、

$$\begin{aligned} & p \text{ が臨界点である} \\ \iff & f_{*,p} \text{ が全写像でない} \\ \iff & f_{*,p} \text{ の像が 0 次元} \\ \iff & \frac{\partial f}{\partial x^j}(p) = 0 \qquad {}^\forall j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$