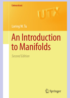


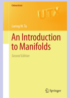
18.5 Pullback of k-Forms

佐野博亮

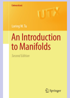
18.5 Pullback of k-Forms

佐野博亮

2025 年 04 月 01 日



目次



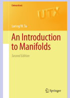
微分形式の引き戻し

0-形式の引き戻し（6.1 章）

$F\colon N \to M$ を多様体の間の滑らかな写像、f を M 上の 0-形式とする。このとき、F による f の引き戻し F^*f は、N 上の 0-形式である。

$$
\begin{aligned}
F^*f\colon N &\to \mathbb{R} \\
p &\mapsto f(F(p))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "F^*f"'] & M \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

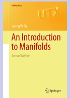


微分形式の引き戻し

k-線形写像の引き戻し（10.3 章）

$L\colon V \to W$ を線形写像、k を正の整数とする。このとき、引き戻し写像 $L^*\colon A_k(W) \to A_k(V)$ を次のように定義する。任意の $f \in A_k(W)$ および $v_1, \dots, v_k$ に対して

$$(L^* f)(v_1, \dots, v_k) = f(L(v_1), \dots, L(v_k)).$$



微分形式の引き戻し

$F\colon N \to M$ を多様体の間の滑らかな写像とすると、点 $p \in N$ における微分 $F_{*,p}\colon T_pN \to T_{F(p)}M$ は線形写像であるから、$F_{*,p}$ の引き戻し写像を定義できる。

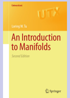
$$(F_{*,p})^*\colon A_k(T_{F(p)}M) \to A_k(T_pN)$$

微分形式は各点においてコベクトルであるから、微分形式の引き戻しはコベクトルの引き戻しを用いて定義できる。

コベクトルの引き戻し

$F\colon N \to M$ を多様体の間の滑らかな写像、$\omega_{F(p)}$ を M 上の点 $F(p)$ における k-コベクトルとする。このとき、ω の引き戻し $(F_{*,p})^*\omega_{F(p)}$ は、N 上の点 p における k-コベクトルである。任意の $X_{1,p}, \dots, X_{k,p} \in T_pN$ に対して、

$$\bigl((F_{*,p})^*\omega_{F(p)}\bigr)(X_{1,p}, \dots, X_{k,p}) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}(X_{1,p}), \dots, F_{*,p}(X_{k,p})).$$



微分形式の引き戻し

微分形式の引き戻し

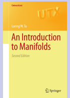
$F\colon N \to M$ を多様体の間の滑らかな写像、ω を M 上の k-形式とする。このとき、ω の引き戻し $F^*\omega$ は、N 上の k-形式である。任意の点 $p \in N$ に対して

$$(F^*\omega)_p = (F_{*,p})^*\omega_{F(p)}.$$

すなわち、任意の $p \in N$ および $X_1, \dots, X_k \in TN$ に対して

$$(F^*\omega)_p(X_1, \dots, X_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}(X_{1,p}), \dots, F_{*,p}(X_{k,p})).$$

$$\begin{tikzcd}
(T_pN)^k \arrow[r, "(F_*)^k"] \arrow[dr, "(F^*\omega)_p"'] & (T_{F(p)}M)^k \arrow[d, "\omega_{F(p)}"] \\
 & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

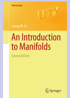


引き戻しの線型性

命題 18.9

$F\colon N \to M$ を多様体の間の滑らかな写像、ω, τ を M 上の k-形式、a を実数とする。このとき、次の等式が成り立つ。

1. $F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau$
2. $F^*(a\omega) = aF^*\omega$



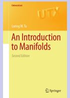
引き戻しの線型性

証明 (1)

任意の $p \in N$ および $X_1, \ldots, X_k \in TN$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(F^*(\omega + \tau))_p(X_1, \ldots, X_k) \\
&\quad = (\omega + \tau)(F_{*,p}(X_{1,p}), \ldots, F_{*,p}(X_{k,p})) \\
&\quad = \omega(F_{*,p}(X_{1,p}), \ldots, F_{*,p}(X_{k,p})) + \tau(F_{*,p}(X_{1,p}), \ldots, F_{*,p}(X_{k,p})) \\
&\quad = (F^*\omega)_p(X_1, \ldots, X_k) + (F^*\tau)_p(X_1, \ldots, X_k) \\
&\quad = ((F^*\omega)_p + (F^*\tau)_p)(X_1, \ldots, X_k) \\
&\quad = (F^*\omega + F^*\tau)_p(X_1, \ldots, X_k).
\end{aligned}
$$

$p \in N$ および $X_1, \ldots, X_k \in TN$ は任意であるから $F^*(\omega + \tau) = F^*\omega + F^*\tau$ が成り立つ。 ■



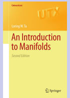
引き戻しの線型性

証明 (2)

任意の $p \in N$ および $X_1, \ldots, X_k \in TN$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(F^*(a\omega))_p(X_1, \ldots, X_k) \\
&\quad = (a\omega)(F_{*,p}(X_{1,p}), \ldots, F_{*,p}(X_{k,p})) \\
&\quad = a\omega(F_{*,p}(X_{1,p}), \ldots, F_{*,p}(X_{k,p})) \\
&\quad = a(F^*\omega)_p(X_1, \ldots, X_k) \\
&\quad = (a(F^*\omega)_p)(X_1, \ldots, X_k) \\
&\quad = (aF^*\omega)_p(X_1, \ldots, X_k).
\end{aligned}
$$

$p \in N$ および $X_1, \ldots, X_k \in TN$ は任意であるから $F^*(a\omega) = aF^*\omega$ が成り立つ。 ■



引き戻しの滑らかさ

$k = 0, 1$ の場合を除き、滑らかな k-形式の引き戻しが滑らかであるかどうかは未だ議論していない。これは 19.5 章で扱うことにする。