



18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

2025 年 04 月 01 日



目次

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数



微分形式の楔積

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

コベクトルの楔積 (3.7 章)

V を線形空間、 $f \in A_k(V)$, $g \in A_l(V)$ とする。このとき、 $f \wedge g \in A_{k+l}(V)$ を次のように定義する。任意の $v_1, \dots, v_{k+l} \in V$ に対して

$$(f \wedge g)(v_1, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \text{sgn}(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) g(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}).$$



微分形式の楔積

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

微分形式は各点においてコベクトルであるから、微分形式の楔積はコベクトルの楔積を用いて定義できる。

微分形式の楔積

M 上の k -形式 ω と l -形式 η に対して、楔積 $\omega \wedge \eta$ は $(k+l)$ -形式である。任意の $p \in M$ に対して

$$(\omega \wedge \eta)_p = \omega_p \wedge \eta_p.$$



楔積の滑らかさ

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

命題 18.10

ω, τ が共に滑らかな微分形式であるとき、 $\omega \wedge \tau$ も滑らかな微分形式である。



楔積の滑らかさ

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

証明

任意の M 上のチャート $(U, x^1, \dots, x^n)$ を与える。命題 18.7 より、 ω, τ は滑らかな係数 a_I, b_J を用いて $\omega = a_I dx^I, \tau = b_J dx^J$ と表される。したがって、 $\omega \wedge \tau$ は

$$\begin{aligned}\omega \wedge \tau &= \sum_{I \in \mathcal{J}_{k,n}} \sum_{J \in \mathcal{J}_{l,n}} a_I b_J dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum_{K \in \mathcal{J}_{k+l,n}} \left(\sum_{I \cup J = K} a_I b_J \operatorname{sgn}(\sigma_{I,J}) \right) dx^K\end{aligned}$$

と表される。ここにおいて、すべての dx^K の係数は滑らかであるから、命題 18.7 より、 $\omega \wedge \tau$ は滑らかな微分形式である。 ■



楔積の引き戻し

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

命題 18.11

$F: N \rightarrow M$ を多様体の間の滑らかな写像、 ω を M 上の k -形式、 τ を M 上の l -形式とする。このとき

$$F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau.$$



楔積の引き戻し

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

証明

任意の $p \in N$ および $X_1, \dots, X_{k+l} \in TN$ に対して

$$\begin{aligned} & (F^*(\omega \wedge \tau))_p(X_1, \dots, X_{k+l}) \\ &= (\omega \wedge \tau)_{F(p)}(F_{*,p}(X_{1,p}), \dots, F_{*,p}(X_{k+l,p})) \\ &= (\omega_{F(p)} \wedge \tau_{F(p)})(F_{*,p}(X_{1,p}), \dots, F_{*,p}(X_{k+l,p})) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum \operatorname{sgn}(\sigma) \omega_{F(p)}(F_{*,p}(X_{\sigma(1),p}), \dots, F_{*,p}(X_{\sigma(k),p})) \tau_{F(p)}(F_{*,p}(X_{\sigma(k+1),p}), \dots, F_{*,p}(X_{\sigma(k+l),p})) \\ &= \frac{1}{(k+l)!} \sum \operatorname{sgn}(\sigma) (F^*\omega)_p(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) (F^*\tau)_p(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}) \\ &= ((F^*\omega)_p \wedge (F^*\tau)_p)(X_1, \dots, X_{k+l}) \\ &= (F^*\omega \wedge F^*\tau)_p(X_1, \dots, X_{k+l}). \end{aligned}$$

したがって、 $F^*(\omega \wedge \tau) = F^*\omega \wedge F^*\tau$ が成り立つ。



反交換次数付き代数

18.6 The Wedge Product

佐野博亮

目次

微分形式の楔積

楔積の滑らかさ

楔積の引き戻し

反交換次数付き代数

n 次元多様体 M 上の滑らかな微分形式全体のなす線形空間 $\Omega^*(M)$ を、 $\Omega^k(M)$ の直和と定める。

$$\Omega^*(M) = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M).$$

これは、微分形式の楔積および次数を伴って反交換次数付き代数をなす。

▶ 3.9 章