



18.7 Differential Forms on a Circle

佐野博亮

目次

円周上の微分形式

18.7 Differential Forms on a Circle

佐野博亮

2025 年 04 月 01 日



目次

18.7 Differential Forms on a Circle

佐野博亮

目次

円周上の微分形式

目次

円周上の微分形式



円周上の微分形式

18.7 Differential Forms on a Circle

佐野博亮

目次

円周上の微分形式

次の写像を与える。

$$h : \mathbb{R} \rightarrow S^1$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

微分 $\dot{h}(t) = (-\sin t, \cos t)$ は 0 にならないので、 h は沈め込みである。問題 18.8 より、滑らかな微分形式の引き戻し写像 $h^* : \Omega^*(S^1) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R})$ は単射である。したがって、 $\Omega^*(S^1)$ を $\Omega^*(\mathbb{R})$ の部分空間と同一視できる。



円周上の微分形式

18.7 Differential Forms on a Circle

佐野博亮

目次

円周上の微分形式

$\omega = -y dx + x dy$ と定める。例 17.16 より、この引き戻しは

$$h^*\omega = dt$$

である。 ω は 0 にならないので、 ω は S^1 の余接バンドル T^*S^1 のフレームである。すなわち、任意の滑らかな 1-形式 η に対して、ある S^1 上の滑らか関数 f が存在して $\eta = f\omega$ が成り立つ。この関数 f の引き戻し $\bar{f} = h^*f$ は $\mathbb{R}$ 上の関数である。このとき、命題 18.11 より

$$\begin{aligned} h^*\eta &= (h^*f)(h^*\omega) \\ &= \bar{f} dt \end{aligned}$$

が成り立つ。



円周上の微分形式

18.7 Differential Forms on a Circle

佐野博亮

目次

円周上の微分形式

命題 18.12

$k = 0, 1$ のとき、引き戻し写像 $h^*: \Omega^*(S^1) \rightarrow \Omega^*(\mathbb{R})$ のもとで、 S^1 上の滑らかな k -形式は、 $\mathbb{R}$ 上の周期 2π の滑らかな k -形式と同一視できる。



円周上の微分形式

18.7 Differential Forms on a Circle

佐野博亮

目次

円周上の微分形式

証明 $k = 0$

$f \in \Omega^0(S^1)$ のとき、 $h: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ は周期 2π であるから、引き戻し $h^*f = f \circ h$ は周期 2π である。

逆に、 $\bar{f} \in \Omega^0(\mathbb{R})$ を周期 2π とする。任意の $p \in S^1$ に対し、ある p の近傍 U における局所微分同相写像 h の滑らかな逆写像の 1 つを s とし、 U 上の関数 $f = \bar{f} \circ s$ を定める。 f が well-defined であることを示すために、 s_1, s_2 を共に U 上の h の滑らかな h の逆写像とする。 h の定義より、ある $n \in \mathbb{Z}$ が存在して $s_1 = s_2 + 2\pi n$ が成り立つ。 $\bar{f}$ は周期 2π であるから、 $\bar{f}(s_1) = \bar{f}(s_2)$ が成り立つ。したがって、 f は well-defined である。さらに $h^{-1}(U)$ において

$$\bar{f} = f \circ h = h^*f$$

が成り立つ。 $p \in S^1$ は任意であるから、 S^1 上のなめらかな関数 f であって、 $\bar{f} = h^*f$ なるものが存在する。 ■



円周上の微分形式

18.7 Differential Forms on a Circle

佐野博亮

目次

円周上の微分形式

証明 $k = 1$

$$\begin{array}{ccc} \Omega^0(S^1) & \begin{array}{c} \xrightarrow{f \mapsto f\omega} \\ \xleftarrow{f \mapsto \iota f\omega} \end{array} & \Omega^1(S^1) \\ \downarrow h^* & & \downarrow h^* \\ \Omega^0(\mathbb{R}) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{f} \mapsto \bar{f} dt} \\ \xleftarrow{\bar{f} \mapsto \bar{f} dt} \end{array} & \Omega^1(\mathbb{R}) \end{array}$$

