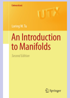
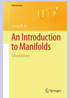


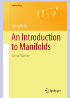
19.5 Exterior Differentiation Under a Pullback

佐野博亮

2025 年 05 月 08 日



目次

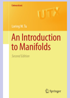


外微分と引き戻しの可換性

命題 19.5 (Commutation of the pullback with d)

$F\colon N \to M$ を多様体の間のなめらかな写像とし、ω を M 上のなめらかな k-形式とする。このとき

$$dF^*\omega = F^*d\omega$$



外微分と引き戻しの可換性

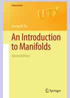
証明 1/3

$k = 0$ のとき、なめらかな 0-形式はなめらかな関数であるから、命題 17.10 そのものである。

$k \geq 1$ のとき、任意の点 $p \in N$ に対して $(dF^*\omega)_p = (F^*d\omega)_p$ を示せば十分である。M 上の $F(p)$ 周りのチャート $(V, y^1, \ldots, y^m)$ を与える。命題 18.7 より、あるなめらかな関数 a_I が存在して、V 上で

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{k,m}} a_I \, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$$

と表される。



外微分と引き戻しの可換性

証明 2/3

左辺について

$$d(F^*\omega) = \sum d\big[F^*\big(a_I\, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\big)\big]$$

命題 18.11 より

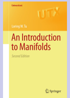
$$= \sum d\big[(F^* a_I)\, F^* dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^* dy^{i_k}\big]$$

命題 17.10 より

$$= \sum d\big[(F^* a_I)\, dF^* y^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^* y^{i_k}\big]$$

d は反導分であり $d \circ d = 0$ であるから

$$= \sum d(F^* a_I) \wedge dF^* y^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^* y^{i_k}$$



外微分と引き戻しの可換性

佐野博亮

証明 3/3

右辺について

$$F^*(d\omega) = \sum F^*\left[d\left(a_I\, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}\right)\right]$$

d は反導分であり $d \circ d = 0$ であるから

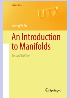
$$= \sum F^*[da_I \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}]$$

命題 18.11 より

$$= \sum (F^* da_I) \wedge\ F^* dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^* dy^{i_k}$$

命題 17.10 より

$$= \sum d(F^* a_I) \wedge dF^* y^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^* y^{i_1}$$

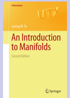


外微分と引き戻しの可換性

系 19.6

U を多様体 M の開集合とし、$\omega \in \Omega^k(M)$ とする。このとき

$$(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$$



外微分と引き戻しの可換性

証明

包含写像 $i\colon U \hookrightarrow M$ を与えると

$$\omega|_U = i^*\omega$$

$$(d\omega)|_U = i^*(d\omega)$$

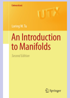
である。命題 19.5 より

$$d(i^*\omega) = i^*(d\omega)$$

であるから

$$d(\omega|_U) = (d\omega)|_U$$

を得る。



外微分と引き戻しの可換性

例

(r,θ)-平面 $\mathbb{R}^2$ の開集合 $U = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$ について写像 $F\colon U \to \mathbb{R}^2$ を

$$F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

と定める。（終域の）$\mathbb{R}^2$ の標準座標を x, y としたとき、F による引き戻し $F^*(dx \wedge dy)$ を計算しなさい。

まず

$$\begin{aligned} F^*(dx \wedge dy) &= F^*dx \wedge F^*dy \\ &= dF^*x \wedge dF^*y \end{aligned}$$

である。

外微分と引き戻しの可換性

ここで

$$\begin{aligned} dF^*x &= d(x \circ F) \\ &= \frac{\partial(x \circ F)}{\partial r} dr + \frac{\partial(x \circ F)}{\partial \theta} d\theta \\ &= \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta \end{aligned}$$

同様に

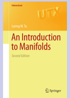
$$dF^*y = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

であるから

$$F^*(dx \wedge dy) = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta) \wedge (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)$$

が成り立つ。$d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta$ であるから

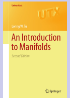
$$F^*(dx \wedge dy) = r dr \wedge d\theta$$



k-形式の引き戻しのなめらかさ

命題 19.7

$F\colon N \to M$ を多様体の間のなめらかな写像、ω を M 上のなめらかな k-形式とする。このとき、$F^*\omega$ は N 上のなめらかな k-形式である。



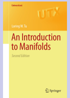
k-形式の引き戻しのなめらかさ

証明 1/2

任意の点 $p \in N$ に対して $F^*\omega$ が点 p でなめらかであることを示せば十分である。M 上の $F(p)$ 周りのチャート $(V, y^1, \ldots, y^m)$ を与える。F の連続性から、N 上の p 周りのチャート $(U, x^1, \ldots, x^n)$ であって、$F(U) \subset V$ なるものが存在する。命題 18.7 より、V 上のなめらかな関数 a_I が存在して、V 上で

$$\omega = \sum_{I \in \mathcal{I}_{k,m}} a_I \, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}$$

と表される。



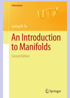
k-形式の引き戻しのなめらかさ

証明 2/2

このとき

$$
\begin{aligned}
F^*\omega &= \sum F^*(a_I\, dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_k}) \\
&= \sum F^*a_I \wedge F^*dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge F^*dy^{i_k} \\
&= \sum (F^*a_I)\, dF^*y^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^*y^{i_k} \\
&= \sum (a_I \circ F)\, dF^{i_1} \wedge \cdots \wedge dF^{i_k} \\
&= \sum_{I,J} (a_I \circ F) \frac{\partial \left(F^{i_1}, \ldots, F^{i_k}\right)}{\partial \left(x^{j_i}, \ldots, x^{j_k}\right)} dx^I
\end{aligned}
$$

であり、F, a_I がなめらかであるから、$F^*\omega$ は点 p でなめらかである。



要約

$$F\colon N \to M$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^0(N) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(N) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(N) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(N) \arrow[r, "d"] & \Omega^4(N) \cdots\cdots\cdots \\
\Omega^0(M) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "F^*"] & \Omega^1(M) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "F^*"] & \Omega^2(M) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "F^*"] & \Omega^3(M) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "F^*"] & \Omega^4(M) \cdots\cdots\cdots \arrow[u, "F^*"]
\end{tikzcd}$$