



19.7 A Nowhere-Vanishing 1-Form on the Circle

佐野博亮

目次

円上のどこでも消失しない 1-
形式

19.7 A Nowhere-Vanishing 1-Form on the Circle

佐野博亮

2025 年 05 月 08 日



目次

19.7 A Nowhere-Vanishing 1-Form on the Circle

佐野博亮

目次

円上のどこでも消失しない 1-
形式

目次

円上のどこでも消失しない 1-形式



円上のどこでも消失しない 1-形式

19.7 A Nowhere-Vanishing 1-Form on the Circle

佐野博亮

目次

円上のどこでも消失しない 1-
形式

$\mathbb{R}^2$ において $x^2 + y^2 = 1$ で定められる単位円を S^1 とする。

▶ $\mathbb{R}^2$ 上の 1-形式 dx を S^1 に制限した 1-形式 $dx|_{S^1}$ は、non-vanishing でない。

点 $p = (1, 0)$ において、 $T_p(S^1)$ の基底は $\frac{\partial}{\partial y}$ である。ここで

$$(dx)_p \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) = 0$$

であるから、 $dx|_{S^1}$ は $p = (1, 0)$ において消失する。



円上のどこでも消失しない 1-形式

19.7 A Nowhere-Vanishing 1-Form on the Circle

佐野博亮

目次

円上のどこでも消失しない 1-
形式

S^1 上のどこでも消失しない 1-形式を探す。方程式

$$x^2 + y^2 = 1$$

について、 d は反導分であるから、 S^1 において

$$2xdx + 2ydy = 0$$

が成り立つ。そこで

$$U_x = \{(x, y) \in S^1 \mid x \neq 0\}$$

$$U_y = \{(x, y) \in S^1 \mid y \neq 0\}$$

と定めると、 $U_x \cap U_y$ において

$$\frac{dy}{x} = -\frac{dx}{y}$$

が成り立つ。



円上のどこでも消失しない 1-形式

19.7 A Nowhere-Vanishing 1-Form on the Circle

佐野博亮

目次

円上のどこでも消失しない 1-
形式

命題

S^1 上の 1-形式 ω を

$$\omega = \begin{cases} \frac{dy}{x} & (U_x \text{ 上}) \\ -\frac{dx}{y} & (U_y \text{ 上}) \end{cases}$$

と定める。このとき、 ω は S^1 上のどこでも消失しないなめらかな 1-形式である。



円上のどこでも消失しない 1-形式

19.7 A Nowhere-Vanishing 1-Form on the Circle

佐野博亮

目次

円上のどこでも消失しない 1-
形式

証明

S^1 の開集合 U_x^+

$$U_x^+ = \{(x, y) \in S^1 \mid x > 0\}$$

と定める。 U_x^+ において、 y は局所座標であり、任意の点 $p \in U_x^+$ において dy は余接空間 $T_p^*(S^1)$ の基底である。 U_x^+ 上で $\omega = \frac{dy}{x}$ であるから、どこでも消失せず、なめらかである。

この議論は U_x^-, U_y^+, U_y^- についても同様であるから、 ω は S^1 上のどこでも消失しないなめらかな 1-形式である。