1　剛体の性質

剛体とは、ある（距離関数が時間依存しない）座標系（以下、剛体系と言う）において静止している点の集合である。剛体の運動を考えるために、ある座標系（以下、観測系と言う）をとり、ある点 c の観測系と剛体系による座標が共に時間に依らないとする。観測系として重心系は必ず成り立ち、慣性系がとれる場合もある。剛体系で静止している点のうち点 c から距離 ε だけ離れたもの全体を観測系で見る。これらは時間経過とともに内部で連続的に変化するので、任意の時刻 t において、毛玉の定理よりある静止した要素 $a(t)$ が存在する。剛体系で 2 点 $c, a(t)$ を結んだ直線上の点は観測系で全て静止しているので、剛体はこの直線を軸とする回転運動をしていることがわかる。そこで、角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}(t)$ を、大きさが角速度で向きが回転に対して右ねじの対応するベクトルと定める。剛体が静止している場合は $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ である。また、ベクトル記法を使うため、観測系と剛体系における位置を点 c を始点としたベクトルで表す。剛体系で静止する任意の点 $\boldsymbol{x}$ について、観測系での位置 $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, t)$ で表すと、次式が成り立つ。

$$\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, t)$$

この式が、剛体の性質を記述するための基本式である。

2　剛体の運動の積分

上で述べたように、剛体の瞬間の運動は回転運動で記述される。したがって、角運動量を調べることは剛体の運動を把握するにあたって重要である。剛体系における剛体の密度を ρ とすると、観測系での角運動量は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}(t) &= \int_V \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, t) \times \dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{x}, t) \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^3 x \\ &= \int_V \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}, t)) \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^3 x\end{aligned}$$

上式は観測系に依存する量を含まないので、剛体系で考えることができる。

$$\boldsymbol{L}(t) = \int_V \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \boldsymbol{x}) \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^3 x$$

この式はもはや、時間に依存する量が $\boldsymbol{\omega}(t)$ のみである。また、角運動量は $\boldsymbol{\omega}(t)$ に対して線形である。したがって次のように $(1, 1)$ テンソル $\boldsymbol{I}$ を定め、これを**慣性モーメント**と言う。

$$\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\omega}) = \int_V \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}) \rho(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}^3 x$$

すなわち、角運動量は慣性モーメントを用いて次式で表される。

$$\boldsymbol{L}(t) = \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\omega}(t))$$

なお、観測系における運動エネルギーは角運動量に帰着される。

$$E(t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}(t) \cdot \boldsymbol{L}(t)$$